



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

ULB

# **Optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte und optimale Output Regulation für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme**

Bernhard, Sebastian  
(2020)

DOI (TUpriints): <https://doi.org/10.25534/tuprints-00011835>

Lizenz:



CC-BY-NC-ND 4.0 International - Creative Commons, Attribution Non-commercial, No-derivatives

Publikationstyp: Ph.D. Thesis

Fachbereich: 18 Department of Electrical Engineering and Information Technology

Quelle des Originals: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/11835>

---

# Optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte und optimale Output Regulation für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme

Dem Fachbereich  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
vorgelegte Dissertation

von

**Sebastian Bernhard, M. Sc.**

geboren am 20. April 1987 in Mainz

Referent:	Prof. Dr.-Ing. J. Adamy
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. J. Lunze
Tag der Einreichung:	07. Oktober 2019
Tag der mündlichen Prüfung:	03. März 2020

D17  
Darmstadt 2020

Bernhard, Sebastian: Optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte und optimale Output Regulation für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung auf TUpriints: 2020

URN: `urn:nbn:de:tuda-tuprints-118356`

Tag der mündlichen Prüfung: 03.03.2020

Veröffentlicht unter CC BY-NC-ND 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Automatisierungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt von 2014 bis 2019.

Ich bedanke mich herzlich bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy, für die Möglichkeit am Fachgebiet Regelungsmethoden und Robotik zu promovieren. Das Vertrauen und die großen Freiheiten, die ich dort bei meiner Forschung erfahren durfte, haben es mir letztlich ermöglicht, eigene Ideen zu spinnen, diese weiterzuentwickeln und schließlich meine Ergebnisse zu erzielen, die ich hier niedergeschrieben habe. Dies weiß ich sehr zu schätzen.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze möchte ich mich für die Übernahme des Korreferats, seine hilfreichen Anregungen und unsere interessanten Diskussionen herzlich bedanken.

Sehr zum Gelingen dieser Arbeit hat die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre am Fachgebiet beigetragen. In besonderer Erinnerung werden mir dabei die gemeinsamen frühmorgendlichen Kaffeerunden, wie beispielsweise am Tag nach der Weihnachtsfeier, bleiben. Für diese schöne Zeit bedanke ich mich sehr bei allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen. Bei unserem Sekretariat bedanke ich mich für die organisatorische Unterstützung, besonders auf den letzten Metern zum Einreichen meiner Dissertation „aus der Ferne“. Für die Durchsicht meiner Dissertation (und meiner Veröffentlichungen), kritische Diskussionen und hilfreiche Anregungen möchte ich mich besonders bei Jonathan Hermann, Dr. rer. nat. Tatiana Tatarenko, Moritz Bühler und Jan Zimmermann bedanken. Ein weiterer Dank geht an alle, mit denen ich auf meinen Tagungs- und Konferenzreisen eine gute Zeit verbringen durfte.

Mein größter Dank gilt meiner Familie, ganz besonders meinen Eltern und meiner Freundin Julia. Ihr habt mir während meines Studiums und meiner Doktorandenzeit stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden und nie an meinem Gelingen gezweifelt. Damit habt mir zu diesem Erfolg verholfen. Dafür danke ich euch von ganzem Herzen.

# Erklärungen laut Promotionsordnung

## § 8 Abs. 1 lit. c PromO

Ich versichere hiermit, dass die elektronische Version meiner Dissertation mit der schriftlichen Version übereinstimmt.

## § 8 Abs. 1 lit. d PromO

Ich versichere hiermit, dass zu einem vorherigen Zeitpunkt noch keine Promotion versucht wurde. In diesem Fall sind nähere Angaben über Zeitpunkt, Hochschule, Dissertationsthema und Ergebnis dieses Versuchs mitzuteilen.

## § 9 Abs. 1 PromO

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen verfasst wurde.

## § 9 Abs. 2 PromO

Die Arbeit hat bisher noch nicht zu Prüfungszwecken gedient.

---

Datum und Unterschrift

---

# Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	IX
Kurzfassung	XV
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellungen und Beiträge der Arbeit . . . . .	4
1.2 Übersicht und Aufbau des Inhalts der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Grundlagen zu optimalen Regelungen über endliche und unendliche Horizonte</b>	<b>11</b>
2.1 Diskussion der Problemstellungen . . . . .	11
2.2 Definitionen . . . . .	15
2.2.1 Zulässige Lösungen, Optimalitätskriterien und stationäres Verhalten . . . . .	15
2.2.2 Turnpike und Agreeable Plan . . . . .	23
2.3 Variationsrechnung . . . . .	29
2.3.1 Allgemeiner Fall . . . . .	30
2.3.2 Linear-quadratischer Fall . . . . .	37
2.4 Optimale Regelungen über endliche Horizonte . . . . .	39
2.4.1 Optimale Folgeregung . . . . .	39
2.4.2 Optimale Regelung mit vorgegebenem Endzustand . . . . .	43
2.5 Optimalitätsbedingungen über unendliche Horizonte . . . . .	46
2.5.1 Notwendige Optimalitätsbedingungen . . . . .	46
2.5.2 Hinreichende Optimalitätsbedingungen . . . . .	49
2.6 Linear-quadratischer Regler . . . . .	54
<b>3 Explizite linear-quadratische optimale Folgeregung über unendliche Horizonte</b>	<b>59</b>
3.1 Problemstellung und Annahmen . . . . .	59
3.2 Beiträge und Aufbau dieses Kapitels . . . . .	62
3.3 Stand der Technik . . . . .	65

3.4	Explizite Lösung des Problems über unendliche Horizonte . . .	68
3.4.1	Herleitung algebraischer Entwurfsgleichungen in neuer Form . . . . .	68
3.4.2	Nachweis der überholenden und stationären Opti- malität unter schwachen Annahmen . . . . .	74
3.4.3	Analyse der Kosten der überholend optimalen Lösung	83
3.4.4	Unabhängige Vorgabe der Güte für die Transition und für das stationäre Verhalten . . . . .	85
3.4.5	Sonderfälle wie die Reduzierbarkeit auf einen linear- quadratischen Regler . . . . .	88
3.4.6	Unbeschränkte Soll- oder Störgrößen . . . . .	92
3.4.7	Fazit . . . . .	94
3.5	Zusammenhang mit Lösungen über endliche Horizonte . . .	95
3.5.1	Der Grenzwert der Lösungen über endliche Horizonte	95
3.5.2	Konstruktion einer Turnpike und Nachweis einer Turnpike-Eigenschaft . . . . .	99
3.5.3	Agreeable Plan ohne Annahme 3.3 . . . . .	105
3.5.4	Eine Faustregel zur Anwendbarkeit des Agreeable Plan über den vollständigen endlichen Horizont . . .	111
3.5.5	Fazit . . . . .	115
3.6	Verbindung zur Lösung eines statischen Optimierungsproblems . . . . .	115
3.7	Simulationsbeispiele . . . . .	124
3.7.1	Überaktuiertes System: Helikopter . . . . .	124
3.7.2	Unteraktuiertes System: Drei-Massen-Schwinger . .	136
3.8	Fazit mit Übersicht der Hauptresultate . . . . .	141
<b>4</b>	<b>Optimale Output Regulation für quadratische, über- und unteraktuierte lineare Systeme</b>	<b>145</b>
4.1	Problemstellungen und Annahmen . . . . .	145
4.2	Beiträge und Aufbau dieses Kapitels . . . . .	150
4.3	Stand der Technik . . . . .	152
4.3.1	Überaktuierte Systeme . . . . .	153
4.3.2	Unteraktuierte Systeme . . . . .	155
4.4	Optimale Output Regulation . . . . .	156
4.4.1	Grundlagen . . . . .	157
4.4.2	Überaktuierte Systeme – Lösung von OORP 4.1 . .	162
4.4.3	Unteraktuierte Systeme – Lösung von OORP 4.2 . .	171
4.4.4	Zusammenhang zu einem optimalen Folgeregelungs- problem OFP $_{\infty}$ 4.1 . . . . .	179

4.5	Diskussion . . . . .	184
4.5.1	Quadratische Systeme . . . . .	185
4.5.2	Durchgriff und zusätzliche Zustandsgewichtung . . . . .	186
4.5.3	Allgemeinere zulässige Lösungen . . . . .	188
4.5.4	Unbeschränkte Soll- oder Störgrößen . . . . .	190
4.5.5	Verbindung zur Lösung eines statischen Optimierungsproblems . . . . .	191
4.6	Simulationsbeispiele . . . . .	193
4.6.1	Überaktuiertes System: Helikopter . . . . .	193
4.6.2	Unteraktuiertes System: Drei-Massen-Schwinger . . . . .	198
4.7	Fazit mit Übersicht der Hauptresultate . . . . .	203
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>214</b>
A.1	Definitionen und Sätze . . . . .	214
A.2	Lösungen statischer Optimierungsprobleme . . . . .	217
A.2.1	Unbeschränkte statische Optimierungsprobleme . . . . .	217
A.2.2	Beschränkte statische Optimierungsprobleme . . . . .	219
<b>B</b>	<b>Regelungstechnische Grundlagen</b>	<b>221</b>
B.1	Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit, Beobachtbarkeit und Ent- deckbarkeit . . . . .	221
B.2	Zerlegung nicht vollständig steuerbarer bzw. beobachtbarer Systeme . . . . .	221
B.3	Invariante Nullstellen . . . . .	222
B.4	Transitionsmatrix und adjungiertes System . . . . .	223
B.5	Positiv definite Lösung der Riccatischen Matrixdifferenzial- gleichung . . . . .	225
<b>C</b>	<b>Anhang zu Kapitel 2</b>	<b>227</b>
C.1	Herleitungen zu Abschnitt 2.4.2 . . . . .	227
C.2	Beweis zu Satz 2.3 . . . . .	229
<b>D</b>	<b>Anhang zu Kapitel 3</b>	<b>233</b>
D.1	Herleitungen zu Abschnitt 3.4.3 . . . . .	233
D.2	Beweis zu Lemma 3.1 . . . . .	234
D.3	Beweis zu Satz 3.4 . . . . .	237
D.4	Beweis zu Satz 3.6 . . . . .	240
D.5	Analytische Herleitung zum Gegenbeispiel 3.2 . . . . .	242



D.6 Beweis zu Lemma 3.3 . . . . .	244
<b>E Statische Optimierungsprobleme zur Einhaltung vorgegebener Schranken durch den Folgefehler</b>	<b>247</b>
<b>F Anhang zu Kapitel 4</b>	<b>251</b>
F.1 Ergänzung zu Abschnitt 4.4.1 . . . . .	251
F.2 Beweis zu Satz 4.1 . . . . .	252
F.3 Beweis zu Satz 4.3 . . . . .	256
F.4 Ergänzung zu Abschnitt 4.4.4 . . . . .	259
<b>G Simulationsbeispiele</b>	<b>261</b>
G.1 Helikopter . . . . .	261
G.1.1 Modell aus [132, S. 279] . . . . .	261
G.1.2 Reglermatrizen zu Kapitel 3 . . . . .	262
G.1.3 Reglermatrizen zu Kapitel 4 . . . . .	263
G.2 Drei-Massen-Schwinger . . . . .	264
G.2.1 Modell . . . . .	264
G.2.2 Reglermatrizen zu Kapitel 3 . . . . .	264
G.2.3 Reglermatrizen zu Kapitel 4 . . . . .	265
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>266</b>
<b>Liste der Veröffentlichungen, Vorträge und Patente</b>	<b>282</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>284</b>

# Abkürzungen und Symbole

## Abkürzungen

Abschn.	Abschnitt
AO	Aufholend optimal
EO	Endlich optimal
Gl.	Gleichung
Kap.	Kapitel
o. B. d. A.	Ohne Beschränkung der Allgemeinheit
OFP	Optimales Folgeregelungsproblem
OORP	Optimales Output Regulation Problem
ORP	Output Regulation Problem
QMW	Quadratischer Mittelwert
S.	Seite
SO	Stark optimal
(S)ÜO	(Schwach) überholend optimal
u. d. Nb.	Unter den Nebenbedingungen
vgl.	vergleiche

# Symbole

## Notationen

$\mathbb{N}$ ( $\mathbb{N}_0$ )	Natürliche Zahlen (eingeschlossen der Null)
$\mathbb{R}$ ( $\mathbb{R}_{>0}$ )	Reelle Zahlen (größer als null)
$\mathbb{C}$ ( $\mathbb{C}^-$ , $\mathbb{C}^+$ , $\mathbb{C}_0$ )	Komplexe Zahlen (mit einem Realteil kleiner, größer bzw. gleich null)
$x$ , $\mathbf{x}$ , $\mathbf{X}$	Skalar, Vektor, Matrix
$\Re\{x\}$ , $\Im\{x\}$	Realteil und Imaginärteil von $x$
$\mathbf{X}^\top$	Transponierte von $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}^\mathrm{H}$	Adjungierte (konjugiert komplexe Transponierte) von $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}^{-1}$	Inverse der quadratischen Matrix $\mathbf{X}$
$\det(\mathbf{X})$ , $\text{spur}(\mathbf{X})$ ,	Determinante, Spur sowie Spektrum und Eigenwert
$\sigma(\mathbf{X})$ , $\lambda(\mathbf{X})$	einer quadratischen Matrix $\mathbf{X}$
$\mathbf{X} \succ (\succeq) \mathbf{0}$	Positiv (semi-)definite Matrix $\mathbf{X}$
$\text{rang}(\mathbf{X})$	Rang einer Matrix $\mathbf{X}$
$\text{lnull}(\mathbf{X})$	Linksnultraum einer Matrix $\mathbf{X}$
$\text{diag}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots)$	Blockdiagonale Matrix mit $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots$ auf ihrer Diagonalen
$ x $	Betrag
$\ \mathbf{x}\ _2$	Euklidische Norm bzw. 2-Norm
$\ \mathbf{X}\ _2$ , $\ \mathbf{X}\ _\mathrm{F}$	Induzierte 2-Norm und Frobeniusnorm
$\frac{dx}{dy}$	Ableitung des Ausdrucks $x$ nach der Variablen $y$
$\dot{x}$ , $\dot{\mathbf{x}}$ , $\dot{\mathbf{X}}$	Ableitung nach der Zeit $t$
$\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}}$	Gradient als stehender Vektor der partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial y_i}$
$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$	Jacobi Matrix mit der $i$ -ten Spalten $\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{y}}$
$\frac{\partial^2 x}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{z}}$	Hesse-Matrix mit dem Element $\frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial x}{\partial z_j} \right)$ in der $i$ -ten Zeile und $j$ -ten Spalte
$x(\cdot)$	Funktion $x$ einer Variablen $\cdot$ (meist der Zeit $t$ )
$x(a)$	Wert einer Funktion $x(\cdot)$ an der Stelle $a$
$:=$	Definition
$\equiv$	Identität (über einen festgelegten Definitionsbereich)

---

$\otimes, \oplus$	Kronecker-Produkt und Kronecker-Summe
$\text{vec}(\mathbf{X})$	Vektorisierung einer Matrix $\mathbf{X}$
$\liminf$	Limes inferior
$\limsup$	Limes superior
$\min, \max$	Minimum und Maximum
$\arg \min,$ $\arg \max$	Argument der Minimierung bzw. Maximierung
$x^*, x^*(\cdot)$	Optimale Lösung einer formulierten Problemstellung in Form eines Wertes bzw. einer Funktion
$ _*$	Variablen sind in einem Ausdruck durch ihre optimalen Werte bzw. Funktionen zu ersetzen
$\delta x$	Variation einer Variablen $x$ in der Variationsrechnung

## Lateinische Großbuchstaben

$A, B, E_d$	Systemmatrix, Eingangsmatrix und Störmatrix der Systemdynamik
$A_{cl}$	Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises
$C, D, D_d$	Ausgangsmatrix, Durchgriffsmatrix und Störmatrix des Ausgangs
$\overline{A}, \overline{C}$	Systemmatrix und Ausgangsmatrix des Exosystems
$K, F$	Rückführmatrix und Vorfiltermatrix einer zeitinvarianten Regelung in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur
$K^*(\cdot, T),$ $F^*(\cdot, T)$	Rückführmatrix und Vorfiltermatrix des optimalen Regelgesetzes über einen endlichen Horizont $[0, T]$
$H(\cdot)$	Hamilton-Funktion
$J_{0,T}(\cdot)$	Kostenfunktional über den endlichen Horizont $[0, T]$
$\delta^1 J_{0,T}(\delta u(\cdot)),$ $\delta^2 J_{0,T}(\delta u(\cdot))$	Erste und zweite Variation der Kosten über den endlichen Horizont $[0, T]$
$J_T^u(\cdot), J_T^y(\cdot)$	Stellenergie und Folgefehlerenergie akkumuliert über das Intervall $[0, T]$
$L(\cdot)$	Integrand eines Kostenfunktionals
$\mathcal{O}$	Landausches Symbol für die Ordnung groß $\mathcal{O}$
$P$	Lösung der algebraischen Riccatigleichung
$P_T(\cdot)$	Lösung der Riccatischen Matrixdifferenzialgleichung
$Q, R$	Gewichtungsmatrix des Folgefehlers bzw. der Stellgrößen
$(\mathcal{RG}),$ $(\mathcal{RG}^u), (\mathcal{RG}^y)$	Kennzeichnung der klassischen Regulatorgleichungen sowie der neuen Regulatorgleichungen für über- bzw. unteraktuierte Systeme
$\mathcal{R}_s(s)$	Rosenbrocksche Systemmatrix
$\mathcal{R}_H^u(s), \mathcal{R}_H^y(s)$	Rosenbrocksche Systemmatrix des Hamiltonschen Systems für über- und unteraktuierte Systeme
$\mathcal{R}_\phi(s)$	Rosenbrocksche Systemmatrix der Kozustandsdynamik mit künstlichem Ausgang
$T$	Zeitpunkt des Endes eines Horizontes
$T_{AP}$	Umschaltzeitpunkt für einen Agreeable Plan
$W_s(0, T),$ $W_b(0, T)$	Gramsche Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix

## Lateinische Kleinbuchstaben

$f(\cdot)$	Funktion zur Systemdynamik
$n, \bar{n}$	Ordnung des Systems und des Exosystems
$m, p$	Anzahl der Stellgrößen und Ausgänge
$o$	Landausches Symbol für die Ordnung klein $o$
$t$	Zeit
$\hat{t}$	Transformierte Zeit $\hat{t} = T - t$
$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$	Zustands-, Stellgrößen- und Ausgangsvektor des Systems
$\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$	Zustandsvektor und Solltrajektorie als Ausgangsvektor des Exosystems
$\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0$	Anfangswert des Systems bzw. des Exosystems
$(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$	Lösung der Systemdynamik
$(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$	Variation einer Lösung der Systemdynamik
$(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$	Optimale Lösung über einen endlichen Horizont $[0, T]$
$(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$	Optimale Lösung nach einem gegebenen Optimalitätskriterium über unendliche Horizonte $[0, \infty)$
$(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))$	Stationäres Verhalten einer Lösung $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ für $t \rightarrow \infty$
$(\tilde{\mathbf{x}}(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}(\cdot))$	Abweichung einer Lösung von ihrem stationären Verhalten
$(\mathbf{x}_{\text{AP}}(\cdot), \mathbf{u}_{\text{AP}}(\cdot)), \mathbf{x}_{\text{TP}}(\cdot)$	Agreeable Plan und Turnpike eines optimalen Folgeregelungsproblems über einen endlichen Horizont $[0, T]$

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Obere Schranke der größten Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises
$\bar{\alpha}$	Untere Schranke der kleinsten Zeitkonstante des Exosystems
$\bar{\lambda}$	Eigenwert der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ des Exosystems
$\mu, \rho$	Gewichtungsparameter der Stellenergie bzw. der Folgefehlerenergie
$\Pi_T(\cdot)$	Lösung einer linearen Matrixdifferenzialgleichung als Teil der Sweep Methode
$\Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$	Parametrisierung des stationären Kozustands $\phi_s(\cdot)$ über unendliche Horizonte $[0, \infty)$
$(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$	Parametrisierung eines stationären Verhaltens $(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))$
$(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$	Parametrisierung eines optimalen stationären Verhaltens $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$
$(\delta \Pi_x, \delta \mathbf{F})$	Variation der Matrizen eines optimalen stationären Verhaltens
$(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$	Optimale Lösung des Problems OORP 4.1
$(\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$	Optimale Lösung des Problems OORP 4.2
$\phi_T, \phi$	Kozustand eines optimalen Folgeregelungsproblem über einen endlichen bzw. unendlichen Horizont
$\Phi(t, t_0)$	Wert der Transitionsmatrix zum Zeitpunkt $t$ für eine Lösung der Systemdynamik mit einem Anfangswert zum Zeitpunkt $t_0$
$\Psi(t, t_0)$	Transitionsmatrix bezüglich des adjungierten Systems

# Kurzfassung

Aus Sicherheitsaspekten haben viele technische Anwendungen mehr Akteuren, als zum Erreichen eines Regelzieles, wie etwa das Folgen einer Solltrajektorie durch den Systemausgang, nötig sind. Solche überaktuierten Systeme sollten dann die überzähligen Aktoren möglichst effizient einsetzen, um Stellenergie zu sparen. Weist ein System hingegen keine Redundanz auf, dann wird es das genannte Regelziel nach einem Aktorausfall und aufgrund der daraus entstandenen Unteraktuierung meist verfehlen. Eine effiziente Regelung solcher unteraktuierten Systeme sollte dann die geringstmögliche Energie der Abweichungen von der Solltrajektorie erzielen. Bisher existieren für diese beiden Systemklassen jedoch keine unkomplizierten Ansätze für den Entwurf sowie die Implementierung von effizienten Folgeregelungen.

Beide Problemstellungen können als ein linear-quadratisches optimales Folgeregelungsproblem über einen unendlichen Horizont formuliert werden. Das zugeordnete Kostenfunktional erlaubt eine freie Gewichtung der Stellenergie und der Energie der Abweichungen von der Solltrajektorie. Eine Minimierung dieses Kostenfunktionals ist jedoch unmöglich, da es im Allgemeinen für jede Regelung mit zunehmender Zeit gegen unendlich strebt. Stattdessen wird eine Regelung gesucht, die jede andere mit zunehmender Zeit im Sinne niedrigerer akkumulierter Kosten überholt. Diese Eigenschaft wird als überholende Optimalität bezeichnet. Aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen hierzu werden systematisch algebraische Entwurfsgleichungen in neuer Form abgeleitet, die auf eine zeitinvariante Regelung in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur führen. Die bisherige Theorie erweiternd wird anschließend deren überholende Optimalität mithilfe der Variationsrechnung unter der Annahme beschränkter Soll- und Störgrößen bewiesen. Trifft diese Annahme nicht zu, so wird hergeleitet, dass diese Regelung ein Agreeable Plan ist. Dies bedeutet, dass sie über jeden hinreichend langen endlichen Horizont die zugehörige optimale Folgeregelung approximiert. Unter einer sinnvollen Anforderung an die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises wird daraus abgeleitet, dass ihre Implementierung auch im Falle unbeschränkter Soll- und Störgrößen empfehlenswert ist. Auf Basis der hergeleiteten Eigenschaften, des unkompli-



zierten Entwurfs und der simplen, zeitinvarianten Reglerstruktur wird die optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte als der einheitliche Ansatz herausgearbeitet, der gleichermaßen die Zielstellungen für über- und unteraktuierte Systeme erreicht.

Davon ausgehend wird die Output Regulation Theorie, die zum Entwurf exakter Folgeregelungen dient, für beschränkte Soll- und Störgrößen auf über- und unteraktuierte Systeme erweitert. Zur optimalen Output Regulation werden neue Regulatorgleichungen hergeleitet und es wird belegt, dass diese unter üblichen Annahmen lösbar sind. Für überaktuierte Systeme lässt sich mit diesen eine exakte Folgeregelung mit minimalem Mittelwert der Stellenergie entwerfen, wohingegen für unteraktuierte Systeme die Folgeregelung mit minimaler mittlerer Energie des Folgefehlers bestimmt wird. Für die gefundenen Folgeregelungen wird durch Grenzwertbetrachtungen der Gewichte des Kostenfunctionals nachgewiesen, dass diese Sonderfälle von überholend optimalen Folgeregelungen über unendliche Horizonte sind. Auf gleiche Weise wird für quadratische Systeme, die genauso viele Aktoren besitzen, wie zur Erreichung des Regelzieles notwendig sind, die Erkenntnis gewonnen, dass eine exakte Folgeregelung als Grenzwert aus einer überholend optimalen Folgeregelung hervorgeht. Damit wird die erweiterte Output Regulation Theorie in die Theorie optimaler Folgeregelungen eingebettet.

Ein wesentlicher Beitrag dieser Arbeit besteht darin, dass der Entwurf und die Implementierung von optimalen Folgeregelungen für über- und unteraktuierte Systeme mithilfe der entwickelten Verfahren nicht komplexer sind als für quadratische Systeme. Darüber hinaus sind sie unter üblichen Bedingungen immer möglich. Durch die umfassenden Analysen der Annahmen, Lösbarkeit, Optimalität und weiteren Eigenschaften sowie der Zusammenhänge von exakten und optimalen Folgeregelungen trägt diese Arbeit zu einer Vereinheitlichung der Theorie von Folgeregelungen für lineare Systeme bei.

# Abstract

To increase safety, many technical applications have more actuators than needed to achieve their control objectives such as tracking output references and attenuating disturbances. Tracking controllers for these over-actuated systems should use the additional actuators to save as much input energy as possible. Without this redundancy, any actuator loss causes an under-actuation and the system usually fails to reach the given goal. Hence, for under-actuated systems, tracking controllers should attain the lowest feasible energy of the tracking error instead. So far, however, a simple approach for the design and the implementation of tracking controllers for these types of systems does not exist.

As a starting point we formulate a linear-quadratic optimal tracking problem over an infinite horizon. The corresponding cost functional allows to weigh the tracking error energy and the control input energy. Its minimization, however, is infeasible in general since it will grow constantly with time and diverge eventually for every chosen control. Thus, we seek a control that overtakes any other control in the sense that its accumulated cost is lower over every sufficiently long horizon. This property is known as overtaking optimality. Starting from necessary optimality conditions, we derive methodically a new set of algebraic design equations that yield a time-invariant control. As our contribution to the theory, we prove by the calculus of variations that the resulting control is overtaking optimal in the case of bounded references and disturbances. If these are unbounded instead, we show that our control is an agreeable plan. That is, it approximates every optimal tracking controller that belongs to a sufficiently long finite horizon. Hence, it is recommended to implement our control even when unbounded references and disturbances are present provided that a common assumption is satisfied by the closed loop eigenvalues. Based on these properties, the uncomplicated control design and the simple, time-invariant control structure, it is verified that the optimal tracking controller over an infinite horizon is the unifying approach that allows to achieve the goals of both, over- and under-actuated systems.

Based on these results, we extend the output regulation theory, which is used for designing exact tracking controllers, for over- and under-actuated

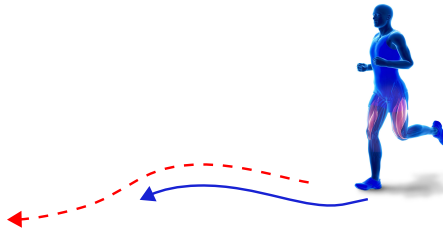
systems. When bounded references and disturbances are regarded, optimal output regulation is achieved by solving new regulator equations that we derive. The solution is feasible under standard assumptions. For over-actuated systems it results in an exact tracking controller that minimizes the average input energy. Whereas for under-actuated systems we obtain a controller that minimizes the average tracking error energy. By utilizing the weights of the cost functional it is shown that both optimal controllers are limits of overtaking optimal controllers over infinite horizons. In the same way we obtain the new insight that exact tracking controllers for square systems, which have equally many inputs as outputs, are also limits of optimal tracking controllers. Thus, the extended output regulation theory is effectively included in the theory of optimal tracking controllers as a special case.

As a main contribution, the design and implementation of optimal tracking controllers for over- and under-actuated systems by our newly developed methods is as simple as for square systems and, in addition, it is feasible under common assumptions. Based on our detailed analysis of assumptions, solvability, optimality and other properties as well as of the connection between exact and optimal tracking controllers, our work contributes to a unified theory of tracking controllers for linear systems.

# 1 Einleitung

Viele technische Systeme verfügen über mehr Aktoren als notwendig wären, um die Aufgabe einer Regelung zu erfüllen. Ein bekanntes Beispiel für ein solches, überaktuiertes System ist das Bremssystem eines herkömmlichen Kraftfahrzeuges, das zwei unabhängige Bremskreisläufe aufweist [94]. Auch bei Ausfall eines Bremskreisläufes kann das Fahrzeug noch sicher verzögert werden. Eine solche Redundanz dient aber nicht immer allein der Sicherheit, sondern kann es auch ermöglichen, die Funktionalität des Systems zu erweitern oder die Energieeffizienz zu verbessern. So sind Quadropten mit schwenkbaren Rotoren agiler [59, 86] oder Flugzeuge mit zusätzlicher Aktorik können senkrecht starten und landen [86, 160]. Bei gewöhnlichen Flugmanövern kann die zusätzliche Aktorik dazu genutzt werden, den Leistungsbedarf zu verringern [120]. Das Gleiche trifft auch auf Kraftfahrzeuge mit elektrischen Radnabenmotoren zu [46]. Bei Hybridelektrofahrzeugen kann neben der Rekuperation beim Bremsen auch der Verbrennungsmotor in verbrauchsgünstigeren Arbeitspunkten betrieben werden [145]. Hierdurch sind Kraftstoffeinsparungen von ca. 10% bis 30% möglich [145]. Auch in anderen Anwendungsbereichen finden sich Beispiele. So werden in Fernwärmesystemen mit verringerten Rohrdurchmessern zusätzliche Pumpen zur Vermeidung zu hoher Druckgradienten benötigt, mithilfe derer im Normalbetrieb die benötigte elektrische Leistung minimiert wird [97]. In der Natur treten ebenfalls überaktuierte Systeme auf, wie der Bewegungsapparat des Menschen [153] in Abbildung 1.1.

Ein konträres Beispiel zu den bisherigen stellt die Regelung der Plasmakontur im Kernfusionsreaktor *Joint European Torus* (JET) vom Typ *Tokamak* dar [141]. Eine vorgegebene Kontur kann im Allgemeinen nicht exakt mithilfe eines magnetischen Feldes realisiert werden, da hierfür zu wenige Magnetspulen zur Verfügung stehen [54]. Stattdessen wird versucht, die Abweichung von der gewünschten Kontur möglichst gering zu halten [54]. Der JET ist somit ein unteraktuiertes System. Technische Systeme mit einer solchen Unteraktuierung sind selten, da generell per Konstruktion garantiert wird, dass ein System die gestellten Anforderungen erfüllen kann. Jedoch geht jedes quadratische System, das genauso viele Aktoren besitzt, wie zur Erreichung des Regelziels notwendig sind, durch den Aus-



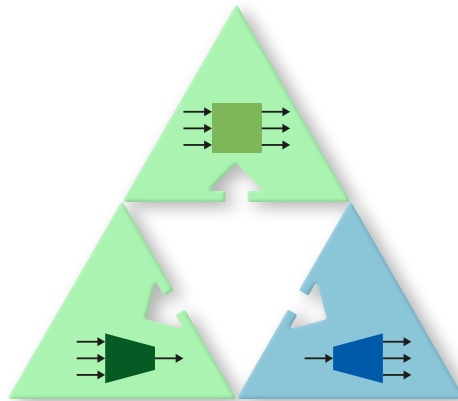
**Abbildung 1.1:** Der menschliche Bewegungsapparat beim Folgen (—) eines Kurses (---) als Beispiel eines überaktuierten Systems aus der Natur.

fall eines Aktors in ein unteraktuiertes System über. Ein Beispiel hierfür ist der Aktorausfall bei Raumfahrzeugen [156].

Aufgrund der zahlreichen technischen Anwendungen ist es evident, dass geeignete Verfahren zum Reglerentwurf sowohl für überaktuierte als auch für unteraktuierte Systeme von hoher Relevanz sind. Dies gilt insbesondere, wenn eine Folgeregung bestimmt werden soll, wie es für die meisten der genannten Beispiele der Fall ist. Das Regelziel besteht somit darin, dass die Ausgänge des Systems vorgegebenen Solltrajektorien folgen sollen. Dann ist das System überaktuiert, wenn es mehr Aktoren, die die Eingänge des Systems darstellen, als Ausgänge besitzt. Liegen hingegen weniger Eingänge als Ausgänge vor, so ist das System unteraktuiert. Bei einer identischen Anzahl von Ein- und Ausgängen liegt in der Regel ein quadratisches System vor.

Quadratische und überaktuierte Systeme haben die Gemeinsamkeit, dass das Regelziel generell erreicht werden kann. Daher konzentrieren sich viele Ansätze in der Literatur darauf, bestehende Entwurfsverfahren für quadratische Systeme so zu erweitern, dass die zusätzlichen Freiheitsgrade nutzbar werden. Hierzu zählen z. B. Erweiterungen der Verfahren der *Output Regulation Theorie* [67, 108, 148], der Entkopplungsregelung [20, 25, 120, 163] oder von Servokompensatoren [93, 126]. Andere Ansätze versuchen diese zusätzlichen Freiheitsgrade unabhängig vom gewählten Verfahren zugänglich zu machen [51, 66, 170]. Bis auf [25] sehen alle Verfahren die Lösung eines statischen Optimierungsproblems im Rahmen des Entwurfs vor, um die Freiheitsgrade effizient einzusetzen. Die meisten dieser Verfahren haben gemein, dass sich zumindest der Reglerentwurf oder die zu implementierende Reglerstruktur komplexer gestalten als im Falle quadratischer Systeme.

Unteraktuierte Systeme sind hingegen generell nicht im Stande, das Regelziel zu erreichen. Es stehen zu wenige Aktoren zur Verfügung, um zu garantieren, dass jeder Ausgang seiner Solltrajektorie exakt folgt. Deshalb ist eine Erweiterung der Verfahren für quadratische Systeme nicht zielführend. Für unteraktuierte Systeme wird daher in der Literatur versucht, die Abweichungen von der Solltrajektorie möglichst gering zu halten. Hierzu wird meist ein statisches Optimierungsproblem formuliert, durch dessen Lösung die Reglerparameter bestimmt werden. Dadurch ist die Anwendung meist auf konstante Solltrajektorien [49, 52, 73, 159] oder Systeme mit einer einzigen Stellgröße [48, 50] limitiert. Andere Ansätze sind allgemeiner anwendbar, jedoch wird nicht erläutert, wie die zugehörige Regelung entworfen werden kann [140, Kapitel 17].



**Abbildung 1.2:** Unterschiedliche Entwurfsverfahren für Folgeregelungen für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme (oben, links, rechts).

Analog zu dieser kompakten Übersicht stellt sich der Stand der Technik wie in Abbildung 1.2 dar. Die bisherigen Beiträge in der Literatur fokussieren sich nur auf eine der Systemklassen. Für überaktuierte Systeme werden überwiegend Erweiterungen der Verfahren für quadratische Systeme angestrebt, was meist die Komplexität des Entwurfs und der Implementierung erhöht. Für unteraktuierte Systeme werden Optimierungsprobleme aufgestellt, deren Anwendung jedoch limitiert ist. Im Kontext der Regelung von über- und unteraktuierten Systemen wird bisher kein einheitlicher Ansatz verfolgt.

Es stellt sich die Frage, wie ein solcher einheitlicher Ansatz aussehen könnte. Als Ausgangspunkt wird ein Beispielsystem, der Bewegungsapparat des Menschen zum Gehen in Abbildung 1.1, herangezogen. Dieser stellt ein überaktuiertes System dar [153], was auch aus einer biomechanischen Modellierung in [1, 57] hervorgeht. Die resultierenden Gangmuster sowie die zugehörigen Muskelkraftverläufe sind somit nicht eindeutig [153]. Durch den Einsatz der Theorie optimaler Regelungen unter der Minimierung energiebasierter Gütefunktionale wurden Ergebnisse in [8] erzielt, die „auf eindrucksvolle Weise“ mit den natürlichen Gangmustern des Menschen übereinstimmen [153]. Es ist daher möglich, dass dem menschlichen Gang ein solches optimales Prinzip zur Nutzung der vorhandenen Freiheitsgrade zugrunde liegt [8]. Die Wahl des Gütefunktionals wird jedoch, wie in [8, 153], noch kontrovers diskutiert. Eine Übersicht hierzu gibt [57].

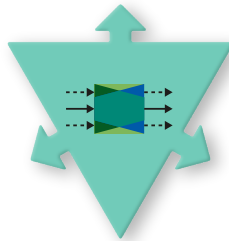
Es ist naheliegend, dass den Bewegungsabläufen des Menschen bei Aufgaben, die er nicht exakt erfüllen kann und während denen er ein unteraktuiertes System darstellt, ebenfalls ein optimales Prinzip zugrunde liegen wird. In der Tat ermöglicht die Theorie optimaler Regelungen auch für diese Situation den Entwurf optimaler Folgeregelungen. Da an die Anzahl von Aktoren und Ausgängen keinerlei Voraussetzungen geknüpft werden, siehe z. B. [6, 39, 43, 119], ist eine optimale Regelung für beide Systemklassen gleichermaßen geeignet und wird daher in dieser Arbeit als einheitlicher Ansatz verfolgt. Offen ist jedoch, ob es möglich ist, hierdurch ebenfalls die Nachteile, wie eine erhöhte Reglerkomplexität oder die limitierenden Anwendungsvoraussetzungen, auszuräumen.

## 1.1 Problemstellungen und Beiträge der Arbeit

Wie bei den meisten der zuvor genannten Verfahren zu über- und unteraktuierten Systemen, werden auch in dieser Arbeit lineare zeitinvariante Systeme betrachtet. Als einheitlicher Ansatz wird ein optimales Folgeregelungsproblem formuliert. Dessen Kostenfunktional gewichtet die Abweichungen des Ausgangs von der Solltrajektorie sowie die Stellgröße jeweils in einer quadratischen Form und integriert deren Summe über die Zeit. Hierdurch wird die Energie des Folgefehlers und die Stellenergie berücksichtigt. Dabei werden lediglich Solltrajektorien zugelassen, die durch ein autonomes lineares System, das als Exosystem bezeichnet wird, erzeugt werden können. Dies stellt keine besondere Einschränkung dar. So sind z. B. belie-

bige Polynome mit der Zeit als Variable oder periodische Signale, die sich als Fourierreihe mit endlich vielen Koeffizienten entwickeln lassen, zugelassen.

Weiterhin wird als Integrationsintervall ein unendlicher Horizont betrachtet, wie es auch die zuvor genannten Verfahren explizit oder implizit tun. Dies bringt die Besonderheit mit sich, dass im Allgemeinen keine minimalen Kosten existieren können, da für jede Regelung die über unendlich lange Zeit akkumulierten Kosten unendlich groß werden. Ursächlich hierfür ist, dass einem System normalerweise fortlaufend Stellenergie zugeführt werden muss, damit dessen Ausgang einer Solltrajektorie folgt. Auf die Problematik eines nicht existenten Minimums wird in der Literatur oft nicht eingegangen, siehe z. B. [56, 123, 130, 149], obwohl sie maßgeblich für eine Optimalitätsanalyse ist. Andere Ansätze wie [32, 93, 100, 101, 109, 129, 164] formulieren daher Probleme mit modifizierten Kostenfunktionalen, die in jedem Falle endlich sind. Hierbei wird jedoch in der Regel die Existenz einer Regelung, für die der Systemausgang der Solltrajektorie asymptotisch exakt folgt, vorausgesetzt. Deswegen ist die Anwendbarkeit für unteraktuierte Systeme nicht gegeben. Für überaktuierte Systeme garantiert die Lösung hingegen nicht mehr, dass die zusätzlichen Aktoren tatsächlich effizient genutzt werden.



**Abbildung 1.3:** Optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte als der verbindende Theoriebaustein zur Abbildung 1.2.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird ausgehend von speziellen notwendigen Optimalitätsbedingungen über unendliche Horizonte [76] ein Kandidat zur Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems und zur Komplettierung des Theoriegebäudes in Abbildung 1.2 bestimmt. Es wird nachgewiesen, dass dieser unter der Voraussetzung beschränkter Solltrajektorien eine *überholend optimale* Lösung ist und damit eine starke Optimalitätsdefinition [11, 42, 43] erfüllt, die auch für unbeschränkte Kosten sinn-



voll ist. Für unbeschränkte Solltrajektorien wird unter praxisnahen Annahmen gezeigt, dass sich die Anwendung des Kandidaten ebenfalls empfiehlt. Hier stellt er nämlich als sogenannter *Agreeable Plan* [42, 78, 83] eine Näherung der optimalen Lösungen über hinreichend lange endliche Horizonte dar. Die folgenden zentralen Beiträge heben hervor, das hierdurch ein einheitliches Vorgehen für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme gewonnen wird, das die Lücke in Abbildung 1.2 wie gewünscht schließt, was auch Abbildung 1.3 andeutet:

- B1) Einfach zu implementierende, zeitinvariante Regelung in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, d. h. mit einer Zustandsrückführung und einer Vorsteuerung.
- B2) Unkomplizierte Berechnung der Reglermatrizen mithilfe hergeleiteter algebraischer Entwurfsgleichungen.
- B3) Nachweis des Vorliegens einer überholend optimalen Lösung bzw. eines Agreeable Plan sowie umfassende Analyse der Voraussetzungen hierfür.
- B4) Anwendbarkeit für quadratische, überaktuierte und unteraktuierte Systeme.

Außerdem wird noch auf bekannte Sonderfälle aus der Literatur [13, 106, 135] eingegangen sowie eine sogenannte *Turnpike*-Eigenschaft [171, 173] untersucht, die den Zusammenhang der überholend optimalen Lösung zu den optimalen Lösungen über hinreichend lange endliche Horizonte beschreibt. Weiterhin wird die Verbindung zur Lösung eines statischen Optimierungsproblems, das aus [108] abgeleitet wird, aufgezeigt.

Der zweite Teil der Arbeit widmet sich der Output Regulation Theorie [95, 140, 155] für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme. Das Ziel der Output Regulation für lineare Systeme ist es, eine zeitinvariante exakte Folgeregung in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur zu bestimmen, sodass der Systemausgang exakt einer Solltrajektorie folgt, nachdem die anfänglichen Abweichungen infolge der Anfangswerte asymptotisch abgeklungen sind. Im Zentrum des Entwurfs stehen sogenannte, algebraische Regulatorgleichungen, deren Lösbarkeit unter üblichen Voraussetzungen notwendig und hinreichend für die Existenz der exakten Folgeregung ist. Während deren Lösung für überaktuierte Systeme nicht eindeutig ist, existiert für unteraktuierte Systeme in der Regel gar keine und somit auch erwartungsgemäß keine exakte Folgeregung. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Output Regulation Theorie für lineare über- und unteraktuierte Systeme durch

die Lösung zweier formulierter optimaler Output Regulation Probleme erweitert. Dies erfolgt auf Basis der Ergebnisse aus dem ersten Teil und der damit verbundenen Methoden. Für überaktuierte Systeme wird gezeigt, dass es und wie es immer möglich ist, die exakte Folgeregelung zu bestimmen, die den Mittelwert der Stellenergie minimiert. Für unteraktuierte Systeme wird hergeleitet, wie eine Folgeregelung berechnet wird, die den Mittelwert der Energie des auftretenden Folgefehlers minimiert. Dass auch hier die Lücke aus Abbildung 1.2 geschlossen wird, verdeutlichen die zentralen Beiträge:

- B5) Herleitung neuer Regulatorgleichungen jeweils für über- und unteraktuierte Systeme.
- B6) Zeitinvariante Folgeregelung in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, sodass entweder der Systemausgang asymptotisch exakt einer Solltrajektorie folgt und dabei der Mittelwert der Stellenergie minimiert wird oder nur der Mittelwert der Energie des Folgefehlers minimiert wird.
- B7) Umfassende Analyse der Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Regulatorgleichungen und der optimalen Output Regulation Probleme.
- B8) Nachweis, dass die Lösungen der optimalen Output Regulation Probleme für über- und unteraktuierte Systeme als Lösungen von Sonderfällen eines optimalen Folgeregelungsproblems über einen unendlichen Horizont hervorgehen.
- B9) Aufstellung einer einheitlichen Theorie, indem der Nachweis aus B8) auch für quadratische Systeme erbracht wird und damit die klassische Output Regulation Theorie samt der beigetragenen neuen Erweiterungen vollständig in die Theorie optimaler Folgeregelungen über unendliche Horizonte eingebettet wird.

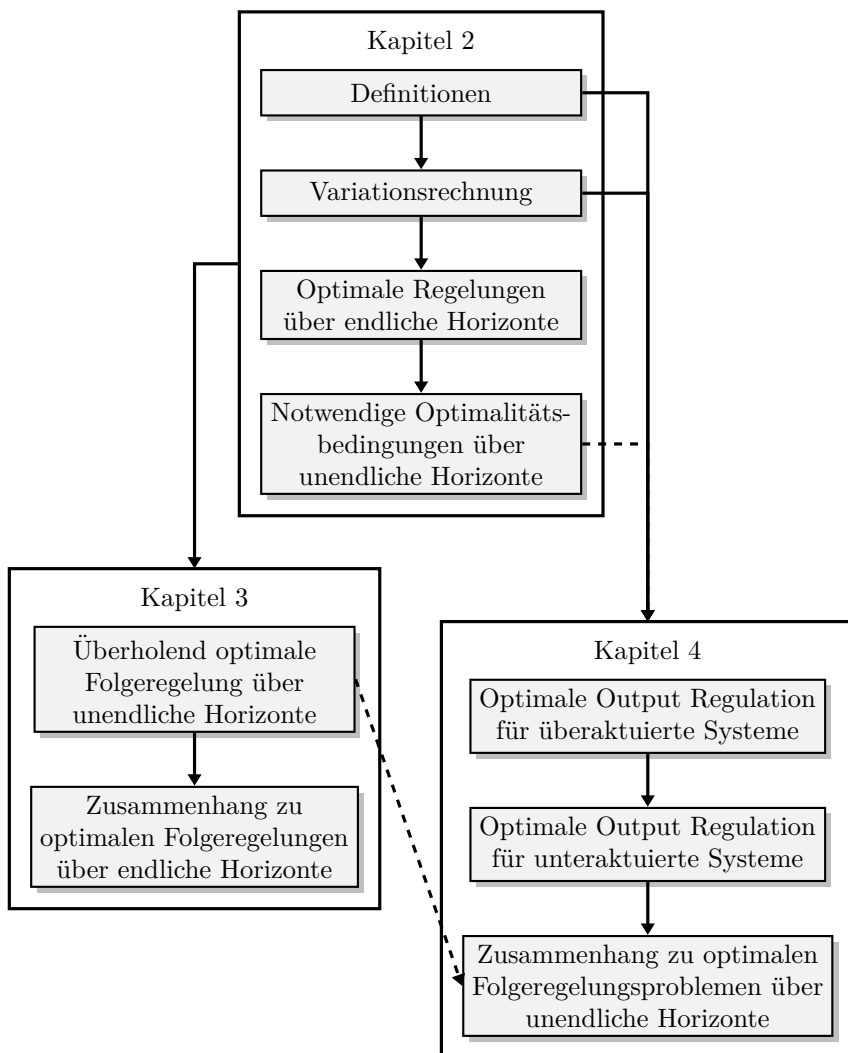
Im Gegensatz zu den aus der Literatur wie [67, 148] bekannten Methoden wird mithilfe dieser Ergebnisse der Entwurf der Regelung und deren Implementierung für über- und unteraktuierte Systeme genauso einfach wie für quadratische Systeme. Weiterhin werden im Rahmen einer Diskussion bisher unbekannte Eigenschaften der Lösung eines statischen Optimierungsproblems aus [108] erörtert.

## 1.2 Übersicht und Aufbau des Inhalts der Arbeit

Der Hauptteil der Arbeit besteht aus den drei Kapiteln 2, 3 und 4. Deren wesentlichen Inhalte und Zusammenhänge zeigt Abbildung 1.4, wobei die folgenden Absätze noch näher auf die Inhalte eingehen. In Kapitel 2 werden die Grundlagen für die Kernkapitel 3 und 4 gelegt. Zu Beginn der Kernkapitel werden die elementaren Problemstellungen formuliert. Sie sind farblich hervorgehoben (■). Diese sind das optimale Folgeregelungsproblem über unendliche Horizonte in Kapitel 3 und zwei optimale Output Regulation Probleme in Kapitel 4. Der Beitrag der Kapitel und deren Aufbau sowie der Stand der Technik werden umfangreich diskutiert. Danach folgt die Präsentation der erzielten Resultate, die sich in der Regel in Herleitungen und Beweisführungen gliedern. Die wichtigsten Ergebnisse werden farblich akzentuiert (■). Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit werden einige Beweise in den Anhang verschoben. Ergänzende Bemerkungen sind an den Enden der Abschnitte zu finden. Die Anwendbarkeit der Ergebnisse wird an einem überaktuierten Helikopter und einem unteraktuierten gedämpften Drei-Massen-Schwinger durch Simulationen demonstriert. An den Enden der Kapitel 3 und 4 werden die gewonnenen Erkenntnisse in Faziten bewertet und es wird eine tabellarische Übersicht der jeweiligen Hauptresultate, die die relevanten Gleichungen für den Reglerentwurf und die wichtigsten Eigenschaften umfasst, gegeben. Abschließend werden die Ergebnisse noch einmal in Kapitel 5 zusammengefasst und ein Ausblick zeigt Möglichkeiten für die weitere Forschung.

Zu den Grundlagen in Kapitel 2 gehört eine mathematische Formulierung des optimalen Folgeregelungsproblems über unendliche und endliche Horizonte. Wichtige Definitionen, wie von *zulässigen* Lösungen, des Begriffes einer überholend optimalen Lösung, der Turnpike oder des Agreeable Plan, werden angegeben. Außerdem wird in die Variationsrechnung eingeführt. Es werden optimale Regelungen über endliche Horizonte hergeleitet und die notwendigen Optimalitätsbedingungen über unendliche Horizonte angegeben sowie in Beziehung zu den notwendigen Bedingungen über endliche Horizonte gesetzt. Überdies werden einige hinreichende Optimalitätsbedingungen aus der Literatur beleuchtet. Auch auf den bekannten linear-quadratischen Regler wird kurz eingegangen.

Auf dieser Basis wird im ersten Teil von Kapitel 3 das optimale Folgeregelungsproblem über einen unendlichen Horizont gelöst. Hierzu werden algebraische Entwurfsgleichungen aus den notwendigen Optima-



**Abbildung 1.4:** Aufbau des Hauptteils der Arbeit mit wesentlichen Inhalten.

litätsbedingungen abgeleitet. Mithilfe der Variationsrechnung wird bewiesen, dass der gefundene Kandidat eine überholend optimale Lösung ist

und ein optimales stationäres Verhalten aufweist. Dass hierfür im Allgemeinen beschränkte Solltrajektorien vorausgesetzt werden müssen, wird anhand eines Gegenbeispiels verdeutlicht. Außerdem wird noch auf die Struktur der optimalen Kosten und verschiedene Sonderfälle sowie auf eine getrennte Vorgabe der Güte für die Transition und das stationäre Verhalten eingegangen. Der zweite Teil von Kapitel 3 widmet sich vordergründig unbeschränkten Solltrajektorien. Dort wird der Zusammenhang zwischen den Lösungen der optimalen Folgeregelungsprobleme über endliche und unendliche Horizonte untersucht. Hierzu gehört unter anderem der Nachweis, unter welchen Bedingungen die optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte ein Agreeable Plan ist und welche Aussagen sich daraus über die Approximation der optimalen Folgeregelungen über endliche Horizonte treffen lassen. Es wird auch auf eine Turnpike-Eigenschaft eingegangen. Abschließend wird noch aufgezeigt, wie das optimale stationäre Verhalten als Lösung eines statischen Optimierungsproblems bestimmt werden kann, falls spezielle Voraussetzungen eingehalten werden. Dieses Optimierungsproblem ist an eines aus [108] angelehnt, das dort im Zusammenhang der Output Regulation für überaktuierte Systeme aufgestellt wurde und in Kapitel 4 näher betrachtet wird.

Im Kapitel 4 wird auch das klassische Output Regulation Problem neben den zwei optimalen Output Regulation Problemen für über- und unteraktuierte Systeme formuliert. Auf Grundlage der Variationsrechnung werden für letztere mögliche Kandidaten bestimmt. Schwache hinreichende Nicht-Resonanz-Bedingungen, unter denen diese Kandidaten existieren, werden ausführlich diskutiert. Für überaktuierte Systeme werden darüber hinaus auch notwendige Bedingungen für deren Existenz erörtert. Dass die Kandidaten optimale Lösungen der optimalen Output Regulation Probleme sind, wird mittels der Variationsrechnung nachgewiesen. Diese dient auch zur Herleitung von hinreichenden und notwendigen Bedingungen, die die Eindeutigkeit der optimalen Lösung garantieren. Abschließend wird auf den Zusammenhang zur Lösung des statischen Optimierungsproblems aus [108] eingegangen, wodurch bisher unbekannte Eigenschaften dieser Lösung aufgezeigt werden, und weitere Aspekte diskutiert.

## 2 Grundlagen zu optimalen Regelungen über endliche und unendliche Horizonte

In diesem Kapitel wird in die optimale Regelung über endliche und unendliche Horizonte eingeführt. Den Ausgangspunkt bildet eine Diskussion der verschiedenen Problemstellungen. Diese motiviert die Definitionen wichtiger Begriffe, wie der Optimalität, und weiterer Eigenschaften. Danach wird in die Variationsrechnung eingeführt, die als wichtiges Werkzeug in den Beweisführungen dieser Arbeit dient. Mittels dieser wird im Anschluss die Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems auf einem endlichen Horizont hergeleitet, die in Abschnitt 3 eine wichtige Rolle spielt. Weiterhin werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen über einen unendlichen Horizont für die betrachtete linear-quadratische Problemstellung hergeleitet. Diese dienen in den folgenden Kapiteln zur Bestimmung von Lösungskandidaten. Abschließend werden einige der Erkenntnisse am Beispiel des linear-quadratischen Reglers demonstriert.

### 2.1 Diskussion der Problemstellungen

In dieser Arbeit werden lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.1b)$$

betrachtet. Zu einem Zeitpunkt  $t \in [0, \infty)$  ist  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  der Zustandsvektor der Systemdynamik (2.1a) mit dem Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  ist der Stellgrößenvektor und  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  ist der Ausgangsvektor des Systems. Das System wird von Störungen  $\mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}}(t)$  und  $\mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}}(t)$  auf die Systemdynamik bzw. auf den Ausgang beeinflusst. Man bezeichnet  $\mathbf{A}$  als Systemmatrix,  $\mathbf{B}$  als Eingangsmatrix,  $\mathbf{C}$  als Ausgangsmatrix sowie  $\mathbf{E}_d$  und  $\mathbf{D}_d$  als Störmatrizen. Eine Durchgriffsmatrix  $\mathbf{D}$ , durch die die Stellgröße  $\mathbf{u}$

linear auf den Ausgang  $\mathbf{y}$  wirkt, wird nur deshalb nicht berücksichtigt, um eine übersichtliche Präsentation der Ergebnisse zu ermöglichen. Es werden die folgenden drei Klassen von Systemen unterschieden:

**Definition 2.1** (Quadratische, über- und unteraktuierte Systeme). Das System (2.1) mit der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  und  $p$  Ausgängen<sup>1)</sup> in  $\mathbf{y}$  heißt

- (i) quadratisch, falls  $\text{rang}(\mathbf{B}) = p$  gilt.
- (ii) überaktuiert, falls  $\text{rang}(\mathbf{B}) > p$  gilt.
- (iii) unteraktuiert, falls  $\text{rang}(\mathbf{B}) < p$  gilt.

Weiterhin wird angenommen, dass die Störungen  $\mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}(t)$  und  $\mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}}(t)$  durch ein autonomes Exosystem

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} \quad (2.2a)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \quad (2.2b)$$

modelliert werden können. Hier heißt  $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$  Zustandsvektor des Exosystems mit dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$ . Weiterhin wird angenommen, dass der Vektor  $\bar{\mathbf{y}}(t) \in \mathbb{R}^p$  der gewünschten Solltrajektorien ebenfalls durch das Exosystem generiert werden kann. Die Dynamik des Exosystems wird dann häufig in einer Blockdiagonalstruktur vorliegen, da in den meisten Fällen eine strikte Trennung der Dynamik des Störmodells und des Sollwertmodells zu erwarten ist.

Ausgehend von diesen Zusammenhängen steht das folgende linear-quadratische optimale Folgeregelungsproblem im Fokus dieser Arbeit:

**Optimales Folgeregelungsproblem: OFP<sub>∞</sub>2.1** (Unendlicher Horizont). Für jedes beliebige  $T > 0$  seien die Kosten bzw. das quadratische Gütemaß

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) \, dt \quad (2.3)$$

<sup>1)</sup>Bei dieser Unterscheidung wird implizit von  $\text{rang}(\mathbf{C}) = p$  ausgegangen. Dies ist sinnvoll, denn jedes System mit  $\text{rang}(\mathbf{C}) < p$  verhält sich im Grunde wie ein unteraktuiertes System, da es sein Regelziel, der Solltrajektorien  $\bar{\mathbf{y}}$  ohne Fehler zu folgen, im Allgemeinen nicht erreichen kann. Jedoch wird in dieser Arbeit keinesfalls  $\text{rang}(\mathbf{C}) = p$  vorausgesetzt. Bis auf wenige Ausnahmen lassen die getroffenen Annahmen  $\text{rang}(\mathbf{C}) < p$  zu und die Ergebnisse bleiben auch für diesen Fall gültig.

mit den symmetrischen Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  des Folgefehlers  $\tilde{\mathbf{y}}(t) := \mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  der Stellgrößen definiert. Für *gegebene* Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  des Systems (2.1) und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  des Exosystems (2.2), finde eine *zulässige* Lösung<sup>2)</sup>  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1) auf dem Intervall  $[0, \infty)$ , die *optimal* bezüglich der Kosten  $J_{0,T}(\cdot)$  über einen *unendlichen* Horizont:  $T \rightarrow \infty$  ist.

Dieses hat zum Ziel, den bestmöglichen Kompromiss zwischen der benötigten Stellenergie  $\int_0^T \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \, dt$  und der Energie des Folgefehlers  $\int_0^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \, dt$  zu erreichen und die Kosten  $J_{0,T}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  für  $T \rightarrow \infty$ , folglich über den unendlichen Horizont, möglichst gering zu halten. Dabei ist jedoch zu beachten, dass einem System (2.1) für gewöhnlich fortlaufend Stellenergie zugeführt werden muss, damit der Ausgang  $\mathbf{y}$  einer Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  folgt und der Folgefehler gegen null konvergiert. Die Kosten weisen daher für  $T \rightarrow \infty$  im Allgemeinen kein Minimum auf, sondern sind, unabhängig von der Wahl von  $\mathbf{u}(\cdot)$ , unbeschränkt. Dies stellt die größte Herausforderung bei der Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  dar. Hierauf wird in der Diskussion zur Optimalität am Ende dieses Abschnittes weiter eingegangen. Ein klassischer Sonderfall des Problems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  ist die durch  $\bar{\mathbf{y}}(t) \equiv \mathbf{0}$  und ohne Störungen vereinfachte Problemstellung, für die unter üblichen Annahmen die Kosten ein Minimum besitzen. Die Lösung ist durch den bekannten linear-quadratischen Regler gegeben, auf den in Abschnitt 2.6 näher eingegangen wird, siehe hierzu z. B. auch [6].

Im Gegensatz zu herkömmlichen statischen Optimierungsproblemen (vergleiche Anhang A.2) hat das optimale Folgeregelungsproblem eine Differenzialgleichung (2.1a) als Nebenbedingung. Außerdem ist keine feste Optimierungsvariable (wie bspw. ein Parametervektor) gesucht, sondern eine Funktion  $\mathbf{u}^*(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , durch die die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  mittels (2.1a) bestimmt wird. Das Gütemaß (2.3) wird daher auch als *Gütefunktional* bzw. *Kostenfunktional* bezeichnet im Unterschied zur Gütefunktion. Da die Reglerstruktur durch das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  nicht festgelegt ist, wird in der Literatur auch von Strukturoptimierung gesprochen [62]. Hier werden diese Aspekte unter dem Begriff der *dynamischen* Optimierung zusammengefasst. Zur Bestimmung einer Lösung sind weiterführende Methoden wie die Variationsrechnung notwendig, die über jene für statische Optimierungsprobleme in Anhang A.2 hinausgehen und in Abschnitt 2.3 erläutert werden. Wie angedeutet, erhält man als Ergebnis eine Funktion  $\mathbf{u}^*(t)$  der Zeit  $t$ , die prinzipiell

<sup>2)</sup>Der Begriff der zulässigen Lösung wird im nächsten Abschnitt definiert.



eine Steuerung darstellt. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese Funktionen jedoch als Regelungen mit einer Zustandsrückführung  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  vorliegen, sodass die Bezeichnung als Folgeregelungsproblem berechtigt ist.

In der Literatur wird zwischen zwei Klassen von optimalen Regelungsproblemen elementar unterschieden. Dies sind zum einen die optimalen Regelungsprobleme über einen *endlichen Horizont*  $[0, T]$  mit bekanntem  $T > 0$  und zum anderen jene über einen *unendlichen Horizont*  $[0, \infty)$ , d. h.  $T \rightarrow \infty$ , wozu auch das Problem  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  gehört. Dabei ist der Fall  $T \rightarrow \infty$  „keinesfalls als triviale Erweiterung des Problems über einen endlichen Horizont“ aufzufassen [121, Abschnitt 3.3]. Um die Schwierigkeiten aufzuzeigen, die Probleme mit unendlichem Horizont gegenüber denen mit endlichem mit sich bringen, wird zunächst das optimale Folgeregelungsproblem über einen endlichen Horizont formuliert:

**Optimales Folgeregelungsproblem:  $\text{OFP}_{T 2.1}$**  (Endlicher Horizont). Für *gegebene* Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  des Systems (2.1) und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  des Exosystems (2.2) sowie ein *gegebenes*  $T > 0$ , finde eine *zulässige* Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1) auf dem Intervall  $[0, T]$ , die die Kosten  $J_{0,T}(\cdot)$ , gegeben durch (2.3), *minimiert*.

Eine Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  ist offensichtlich dann optimal, falls

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) \quad (2.4)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  auf dem Intervall  $[0, T]$  erfüllt ist. Dahingehend ist eine Optimalitätsdefinition mit der Forderung nach einem Minimum, wie in der Ungleichung (2.4), für den Fall  $T \rightarrow \infty$  in der Regel ungeeignet. Der Grund ist, dass die Kosten im Allgemeinen *unbeschränkt* sind. D. h., es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_{0,T}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = +\infty \quad (2.5)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1a) und damit natürlich auch für die optimale  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ . Es bedarf demnach der Auswahl eines geeigneten Optimalitätskriteriums für unendliche Horizonte, bevor man das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  in Kapitel 3 lösen kann. Im nächsten Abschnitt werden hierzu verschiedene Optimalitätskonzepte vorgestellt und auch geklärt, welche Lösungen  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1a) überhaupt zulässig sind.

Wie bereits durch das vorangestellte Zitat aus [121] angedeutet, mag man intuitiv davon ausgehen, dass es einen Zusammenhang zwischen den Lösungen  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  und  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  gibt, zumindest für große  $T$ .

Dieser Zusammenhang kann durch die im nächsten Abschnitt eingeführten Konzepte der *Turnpike* und des *Agreeable Plan* quantitativ erfasst werden. Unter welchen Voraussetzungen diese Konzepte dann vorliegen, wird in Kapitel 3 untersucht.

Im Abschnitt 2.4 wird aufgezeigt, dass die z. B. aus [6] oder [121] bekannte optimale Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_T 2.1$  leicht mittels der in Abschnitt 2.3 eingeführten Variationsrechnung ermittelt werden kann. Mithilfe der ermittelten notwendigen Optimalitätsbedingungen wird ein Kandidat bestimmt, dessen Optimalität dann durch hinreichende Bedingungen nachgewiesen wird. Es stellt sich die Frage, ob diese Optimalitätsbedingungen auf den unendlichen Horizont übertragen werden können. Dies muss verneint werden, was in Abschnitt 2.3 aufgezeigt wird. In Abschnitt 2.5 werden daher die notwendigen Bedingungen für das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  auf Basis der Ergebnisse in [76] hergeleitet. Im Anschluss wird das Fehlen geeigneter hinreichender Optimalitätsbedingungen für das gegebene Problem diskutiert. Dies unterstreicht, dass sich die Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  komplexer gestaltet als die des Problems  $\text{OFP}_T 2.1$ .

## 2.2 Definitionen

In diesem Abschnitt werden alle Begrifflichkeiten definiert, die im Rahmen der Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  bzw. der Erfassung des Zusammenhangs der Lösungen beider Probleme  $\text{OFP}_\infty 2.1$  und  $\text{OFP}_T 2.1$  von Bedeutung sind. Grundlegende Definitionen, auf denen dabei aufgebaut wird, sind im Anhang A.1 zu finden.

### 2.2.1 Zulässige Lösungen, Optimalitätskriterien und stationäres Verhalten

#### Zulässige Lösungen

Die folgende Definition legt fest, welche Lösungen der Systemdynamik (2.1a) als Lösungen der Probleme  $\text{OFP}_\infty 2.1$  und  $\text{OFP}_T 2.1$  zugelassen werden.

**Definition 2.2** (Zulässige Lösung). Zu einem Anfangswert  $\bar{x}_0$  sei  $\bar{x}(t)$  die Lösung des Exosystems  $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}$  aus (2.2a) auf dem Intervall  $[0, \infty)$

$([0, T])$ . Für einen gegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  heißt eine Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1a)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}$$

zulässig über einen unendlichen (endlichen) Horizont, falls  $\mathbf{x}(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{x}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  für ein gegebenes  $T > 0$ ) mit  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  stetig und stückweise stetig differenzierbar ist und falls  $\mathbf{u}(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\mathbf{u}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) stückweise stetig ist.

Diese Definition ist an die in [74] und [76] gegebenen angelehnt. Die Definition A.1 zur stückweisen Stetigkeit garantiert, dass  $\mathbf{u}(t)$  auf jedem beschränkten Teilintervall von  $[0, \infty)$  ( $[0, T]$ ) beschränkt<sup>3)</sup> ist. Daher ist die Riemann-Integrierbarkeit gewährleistet und es existiert für jede zulässige Lösung das Gütemaß  $J_{t_0, t_1}(\cdot)$  über jedes abgeschlossene und beschränkte Teilintervall  $[t_0, t_1] \subset [0, \infty)$ . Eine Verallgemeinerung wie in [11], [43] oder [117] mittels der Lebesgue-Integration sowie der Forderung nach absoluter Stetigkeit von  $\mathbf{x}(\cdot)$  und Messbarkeit von  $\mathbf{u}(\cdot)$  ist möglich, wird hier aber nicht weiter berücksichtigt. Weiterhin sei erwähnt, dass die Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  die Systemdynamik (2.1a) gegebenenfalls lediglich für *fast alle*  $t \in [0, \infty)$  ( $t \in [0, T]$ ) erfüllt, da  $\mathbf{x}(\cdot)$  auf jedem abgeschlossenen, beschränkten Teilintervall an endlich vielen Stellen nicht differenzierbar sein darf. Im Weiteren wird darauf verzichtet, dies erneut für eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  anzumerken.

Im Folgenden heißen zwei zulässige Lösungen *verschieden* falls

$$(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{u}_1(t)) \neq (\mathbf{x}_2(t), \mathbf{u}_2(t)). \quad (2.6)$$

Aus der Definition 2.2 und der Definition A.1 zur stückweisen Stetigkeit folgt, dass es dann zumindest ein abgeschlossenes, endliches Teilintervall gibt, auf dem  $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{u}_1(t)) \neq (\mathbf{x}_2(t), \mathbf{u}_2(t))$  für fast alle  $t$  gilt.

## Optimalitätskriterien

Die nächste Definition fasst die für diese Arbeit relevanten Optimalitätskonzepte für unendliche Horizonte zusammen. Es wird empfohlen, diese gemeinsam mit der Darstellung von anschaulichen Beispielen in Abbildung 2.1, S. 18, zu studieren. Anhand dessen wird auch die Benennung<sup>4)</sup> einzelner Kriterien nachvollziehbar.

<sup>3)</sup>Da diese Schranke eine beliebig große, positive reelle Zahl ist, ist demnach eine Größenbeschränkung im technischen Sinne nicht vorhanden.

<sup>4)</sup>Die Begriffe sind sinngemäß aus dem Englischen übersetzt: „strongly optimal“ (SO), „overtaking optimal“ (ÜO), „catching-up optimal“ (AO), „finitely optimal“ (EO).

**Definition 2.3** (Optimalität über unendliche Horizonte). Es sei ein Kostenfunktional  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  sowie Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  gegeben. Eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  über einen unendlichen Horizont heißt

(i) *stark optimal (SO)*, falls

$$J_{0,\infty}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) := \lim_{T \rightarrow \infty} J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) < +\infty \quad (2.7)$$

und für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  ein  $\hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in [0, \infty)$  existiert, sodass für alle  $T \geq \hat{T}$  gilt:

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)). \quad (2.8)$$

(ii) *überholend optimal ( $\check{O}O$ ) (schwach überholend optimal ( $S\check{O}O$ ))*, falls zu jeder zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die verschieden zu  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ist, ein  $\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0$  ( $\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0$ ) existiert und es ein  $\hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \epsilon) \in [0, \infty)$  gibt, sodass für alle  $T \geq \hat{T}$  gilt:

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) + \epsilon \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)). \quad (2.9)$$

(iii) *aufholend optimal (AO)*, falls zu jeder zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \epsilon) \in [0, \infty)$  existiert, sodass für alle  $T \geq \hat{T}$  gilt:

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) - \epsilon \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)). \quad (2.10)$$

(iv) *endlich optimal (EO)*, falls für jedes  $T > 0$  und jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  über den endlichen Horizont  $[0, T]$ , die die Endwertbedingung  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*(T)$  erfüllt, gilt:

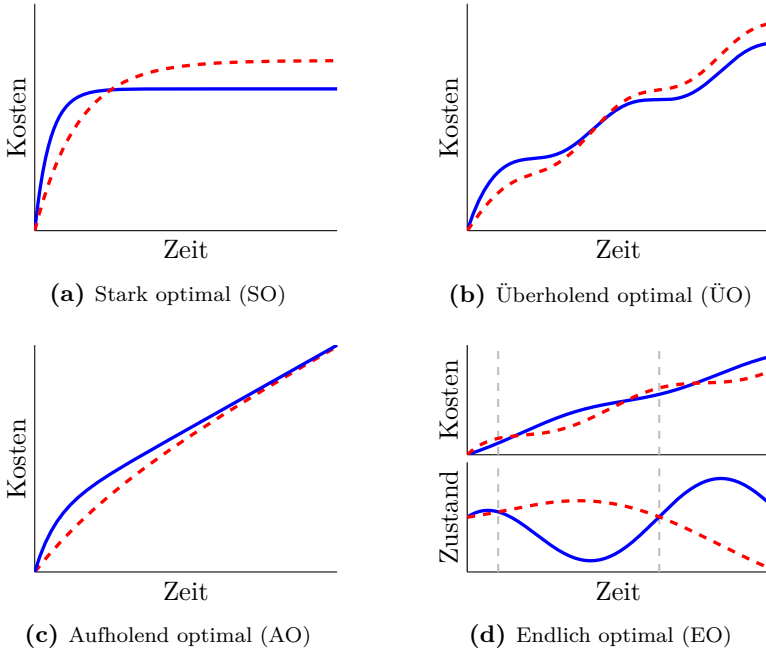
$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)). \quad (2.11)$$

Die Definition zu starker und aufholender<sup>5)</sup> Optimalität sind [42] bzw. [43] entnommen. Starke Optimalität verlangt, dass  $J_{0,\infty}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot))$  ein

<sup>5)</sup>Diese wird in der Literatur oft verkürzt mittels des Limes inferior (Definition A.2)

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} (J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot))) \geq 0 \quad (2.12)$$

definiert und auch als „überholend optimal“ bezeichnet, was aber die Eigenschaft einer solchen Lösung missverständlich beschreibt.



**Abbildung 2.1:** Darstellung der über die Zeit  $t$  kumulierten Kosten  $J_{0,t}(\cdot)$  einer zulässigen Lösung (—), die eines der Optimalitätskriterien in Definition 2.3 erfüllt, und einer dazu verschiedenen zulässigen Lösung (---). In Abbildung (d) ist zusätzlich der Zustand, der hier skalar sei, aufgetragen.

globales Minimum ist, und führt daher auf einen gewohnten Optimalitätsbegriff wie für endliche Horizonte in Problem  $\text{OFP}_T 2.1$ , vergleiche Abbildung 2.1a. Eine optimale Lösung nach Definition 2.3(iii) holt zu jeder verschiedenen Lösung auf, sodass ihre Kosten über jeden hinreichend langen Horizont, wenn nicht niedriger, dann zumindest asymptotisch genauso niedrig sind. Einen Extremfall zeigt Abbildung 2.1c.

Überholende Optimalität wird für die Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  in Kapitel 3 nachgewiesen. Wie Abbildung 2.1b veranschaulicht, überholt eine solche Lösung jede verschiedene Lösung, sodass ihre Kosten über jeden hinreichend langen Horizont im Vergleich niedriger sind. Die aufgeführte Definition entspricht dabei der in [11]. Dies ist eine stärkere Formulierung als die übliche wie in [151], die auch  $\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$  erlaubt und der schwach überholenden Optimalität entspricht. Die Defi-

tion 2.3(ii) verhindert durch  $\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0$ , dass eine aufholend optimale Lösung verschieden von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  existieren kann. Außerdem schließt sie aus, dass es eine zweite überholend optimale Lösung geben kann und somit ist eine solche per Definition *eindeutig*. Eine stark, schwach überholend oder endlich optimale Lösung ist hingegen nur dann eindeutig, wenn die jeweilige strikte Ungleichung ( $<$  statt  $\leq$ ) in (2.8), (2.9) bzw. (2.11) für jede Lösung verschieden von der optimalen erfüllt ist. Falls der Grenzwert (2.7) existiert, ist daher eine überholend optimale Lösung gleichbedeutend zu einer eindeutigen stark optimalen Lösung, wohingegen die schwach überholende Optimalität und die starke Optimalität identisch sind.

Endliche Optimalität ist analog zu [43] definiert. Diese besagt, dass an den Zeitpunkten, an denen der Zustand einer endlich optimalen Lösung mit dem einer dazu verschiedenen Lösung übereinstimmt, die Kosten der endlich optimalen Lösung niedriger oder gleich groß sind. Abseits dieser Zeitpunkte ist es jedoch möglich, dass die verschiedene Lösung niedrigere Kosten als die endlich optimale Lösung aufweist. Die Zusammenhänge werden durch Abbildung 2.1d veranschaulicht, wobei ein skalarer Zustand angenommen wurde.

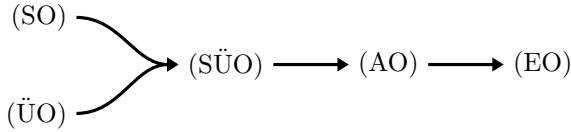
In [42] wird endliche Optimalität auch als *Optimalitätsprinzip* bezeichnet. Dies hat den Hintergrund, dass jede Lösung, die eines der Optimalitätskonzepte aus Definition 2.3(i)-(iii) erfüllt, auch endlich optimal ist. Das lässt sich anhand der folgenden Überlegung aus [76] vergegenwärtigen: Angenommen zu einer Lösung 1  $(\mathbf{x}_1(\cdot), \mathbf{u}_1(\cdot))$  über einen unendlichen Horizont existiert auf einem Intervall  $[0, \hat{T}]$  eine verschiedene Lösung 2  $(\mathbf{x}_2(\cdot), \mathbf{u}_2(\cdot))$ , die  $\mathbf{x}_2(\hat{T}) = \mathbf{x}_1(\hat{T})$  und

$$J_{0, \hat{T}}(\cdot, \mathbf{u}_2(\cdot)) < J_{0, \hat{T}}(\cdot, \mathbf{u}_1(\cdot)) \quad (2.13)$$

erfüllt. D. h., die Lösung 1 ist nicht endlich optimal. Da  $\mathbf{x}_2(\hat{T}) = \mathbf{x}_1(\hat{T})$  gilt, kann man eine Lösung 3  $(\mathbf{x}_3(\cdot), \mathbf{u}_3(\cdot))$  konstruieren, die auf dem Intervall  $[0, \hat{T}]$  der Lösung 2 entspricht und auf  $[\hat{T}, \infty)$  identisch ist zur Lösung 1. Für jedes Intervall  $[0, T]$  mit  $T \geq \hat{T}$  gilt dann

$$J_{0, T}(\cdot, \mathbf{u}_1(\cdot)) - J_{0, T}(\cdot, \mathbf{u}_3(\cdot)) = J_{0, \hat{T}}(\cdot, \mathbf{u}_1(\cdot)) - J_{0, \hat{T}}(\cdot, \mathbf{u}_2(\cdot)) > 0. \quad (2.14)$$

Aus dieser Ungleichung ist sofort ersichtlich, dass Lösung 1 keine der Definitionen 2.3(i)-(iii) erfüllen kann. Daher stellt die endliche Optimalität eine *notwendige Eigenschaft* für jede Lösung dar, die ein stärkeres Optimalitätskriterium erfüllt [83]. Dieser Zusammenhang wird bei der Herleitung von notwendigen Optimalitätsbedingungen in Abschnitt 2.5 ausgenutzt.



**Abbildung 2.2:** Implikationen aus den Optimalitätsdefinitionen 2.3(i)-(iv).

Zusammengefasst können aus den Definitionen die in Abbildung 2.2 dargestellten Zusammenhänge, die aus der Literatur bekannt sind, abgeleitet werden. Jede Lösung, die z. B. (ÜO) ist, ist somit auch (SÜO), (AO) und (EO). Die umgekehrte Richtung gilt im Allgemeinen nicht, wie man anhand von Gegenbeispielen in [43, Kapitel 2] nachvollziehen kann.

## Stationäres Verhalten

In den weiteren Kapiteln wird oft zwischen der Transition eines Systems und seinem stationären Verhalten, das sich nach der Transition für  $t \rightarrow \infty$  einstellt, differenziert. Die Optimalitätskriterien in Definition 2.3 beziehen die Transition und das stationäre Verhalten gleichermaßen ein. Es werden zwei Kriterien eingeführt, die das stationäre Verhalten bewerten. Im Anschluss werden die Definitionen durch das Beispiel 2.1 mit Abbildung 2.3 veranschaulicht.

**Definition 2.4** (Optimales stationäres Verhalten). Es seien ein Kostenfunktional  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  sowie die Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  gegeben. Das *stationäre Verhalten* einer zulässigen Lösung  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  heißt *optimal*, wenn für jede verschiedene zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  entweder

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{u}}(\cdot)) \right) = +\infty \text{ oder} \quad (2.15a)$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} |J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{u}}(\cdot))| < +\infty \quad (2.15b)$$

gilt und, falls die zweite Bedingung (2.15b) zutrifft, daraus folgt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Weist eine zulässige Lösung  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  ein optimales stationäres Verhalten auf, so strebt jede Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ , die eines der Kriterien aus Definition 2.3(i)-(iii) erfüllt und für die daher die erste Bedingung (2.15a) ausgeschlossen werden muss, aufgrund von (2.16) zu diesem stationären Verhalten. Dies begründet die hier gewählte Bezeichnung. Im Umkehrschluss

muss  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  aber nicht zwingend eines dieser Optimalitätskriterien erfüllen, da die Transition in Definition 2.4 keine ausschlaggebende Rolle spielt. Dies kann man daran erkennen, dass das Vorzeichen einer endlichen Kostendifferenz (2.15b) irrelevant ist. Aus diesen Gründen wird  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  in [116] und [174] auch nur als eine „gute“ Lösung bezeichnet.

Weist eine überholend optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ein optimales stationäres Verhalten auf, dann existiert für jede Lösung mit verschiedenem stationären Verhalten nicht nur ein  $\epsilon > 0$  wie in Definition 2.3(ii), sondern dieses kann sogar beliebig groß gewählt werden. Dies unterstreicht, dass Definition 2.4 ein starkes Optimalitätskriterium beschreibt. In Kapitel 3 wird hergeleitet, wie das optimale stationäre Verhalten zum optimalen Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  explizit parametrisiert werden kann. Es sei noch erwähnt, dass Definition 2.4 an ein Ergebnis in [174] angelehnt ist und eine wichtige Rolle im Rahmen der Turnpike-Theorie einnimmt, vergleiche hierzu [171, 173]. Auf die Turnpike-Theorie wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Ein anderes Kriterium, das ebenfalls oft in der Literatur verwendet wird, wie z. B. in [48, 116, 126], ist

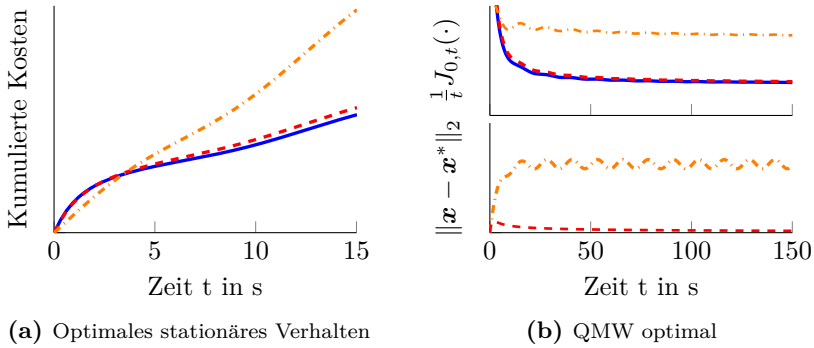
**Definition 2.5** (QMW Optimalität). Es seien ein quadratisches Kostenfunktional  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  sowie die Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  gegeben. Eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  heißt *QMW optimal*, wenn sie den quadratischen Mittelwert (QMW) minimiert. Dieser ist gegeben durch

$$QMW(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) := \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) \right). \quad (2.17)$$

Die Definition setzt voraus, dass der quadratische Mittelwert existiert. Dies wird in der Regel nur der Fall sein, wenn auch das Exosystem (2.2) bestimmte Bedingungen erfüllt und zusätzliche Anforderungen an die zulässigen Lösungen gestellt werden.

Im Allgemeinen führen zulässige Lösungen, die sich nur in der Transition unterscheiden, zum selben QMW. In [167] wird das Kriterium daher lediglich zur Beurteilung des stationären Verhaltens als geeignet eingestuft. Aber auch dabei ist Vorsicht geboten, da zwei zulässige Lösungen, für die sogar jeweils (2.15a) gilt, dennoch den selben QMW haben können. Das Beispiel 2.1 in Abbildung 2.3 illustriert dies. Der Grund ist, dass ein unterschiedlicher QMW nur vorliegt, wenn die Kostendifferenz auf der linken Seite von (2.15a) wenigstens linear in  $T$  anwächst. Dies bedeutet im Umkehrschluss, falls die Minimierung von (2.17) zu einer *eindeutigen* Lösung





**Abbildung 2.3:** Darstellung für Beispiel 2.1 mit QMW-optimaler Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  (—), die ein optimales stationäres Verhalten aufweist, und zwei zulässigen verschiedenen Lösungen (---) und (- - -).

$(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  führt, so stellt QMW Optimalität eine noch stärkere Optimalitätseigenschaft als das optimale stationäre Verhalten dar. Demnach ist QMW Optimalität insbesondere geeignet, wenn die in Betracht gezogenen zulässigen Lösungen aus nachvollziehbaren Gründen so eingeschränkt sind, dass diese Eindeutigkeit gewährleistet wird. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass dies im Falle der optimalen Output Regulation zutrifft.

**Beispiel 2.1.** Gegeben seien eine QMW-optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  (—), die ein optimales stationäres Verhalten aufweist, und zwei zulässige verschiedene Lösungen (---) und (- - -). Für diese werden in Abbildung 2.3 illustrativ die über die Zeit  $t$  kumulierten Kosten  $J_{0,t}(\cdot)$  auf dem Intervall  $[0, 15 \text{ s}]$  und  $\frac{1}{t} J_{0,t}(\cdot)$  auf  $[0, 150 \text{ s}]$  sowie die euklidische Abweichung von  $\mathbf{x}^*(t)$  dargestellt. Die Lösung (---) strebt nicht zum optimalen stationären Verhalten von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ , wie anhand der euklidischen Abweichung zu sehen ist. Somit ist die notwendige Bedingung (2.16) nicht erfüllt und die Kostendifferenz divergiert nach (2.15a), was Abbildung 2.3a zeigt. Der resultierende QMW, der dem Grenzwert von  $\frac{1}{t} J_{0,t}(\cdot)$  für  $t \rightarrow \infty$  entspricht, ist größer als das durch  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  angestrebte Minimum, wie in Abbildung 2.3b zu erkennen ist. Obwohl die Lösung (- - -) die Bedingung (2.16) erfüllt und der Zustand das gleiche stationäre Verhalten wie von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  aufweist, divergiert die Kostendifferenz, sodass (2.15a) gilt. Jedoch nimmt die Kostendifferenz nur logarithmisch mit der Zeit zu, sodass die Lösung (- - -) dennoch zum gleichen QMW wie  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  führt und somit auch QMW-optimal ist.

## 2.2.2 Turnpike und Agreeable Plan

Mithilfe der hier eingeführten Definitionen wird der Zusammenhang der Lösungen der beiden Probleme  $\text{OFP}_\infty 2.1$  und  $\text{OFP}_T 2.1$  quantitativ in Kapitel 3 analysiert.

### Turnpike

Zu Beginn wird ein anschauliches Beispiel aus [172] aufgegriffen: Um mit dem Auto auf einem schnellen und spritsparenden Weg zu einem Zielort zu reisen, wird man für gewöhnlich vom Startpunkt aus auf eine Schnellstraße (im Englischen: „turnpike“) fahren, auf dieser den Großteil der Reisezeit verbringen und erst in der Nähe des Ziels die Schnellstraße verlassen.

Wenn das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_T 2.1$  über einen endlichen Horizont  $[0, T]$  eine *Turnpike-Eigenschaft* besitzt, kann ein ähnliches Verhalten für jede optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  beobachtet werden. Dann gibt es eine Lösung  $(\mathbf{x}_{\text{TP}}(\cdot), \mathbf{u}_{\text{TP}}(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1a) und  $\mathbf{x}_T^*(t)$  wird die meiste Zeit des Intervalls  $[0, T]$  in der Nähe der *Turnpike*  $\mathbf{x}_{\text{TP}}(t)$  verlaufen. Einen kompakten Einstieg in die Turnpike-Theorie bietet [172]. Ein illustratives Beispiel 2.2 mit Abbildung 2.4 ist am Ende dieses Abschnittes gegeben. Eine formale Definition, die angelehnt an jene in [171, 172] ist, lautet:

**Definition 2.6** (Turnpike). Sei  $(\mathbf{x}_{\text{TP}}(\cdot), \mathbf{u}_{\text{TP}}(\cdot))$  eine Lösung der Systemdynamik (2.1a) zu den Anfangswerten  $\mathbf{x}_{\text{TP}}(0)$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Dann heißt  $\mathbf{x}_{\text{TP}}(\cdot)$  *Turnpike* des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_T 2.1$ , falls für jedes  $\epsilon > 0$  sowie jeden beliebigen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  ein  $T_1(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \epsilon) > 0$  und ein  $T_2(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \epsilon) > 0$  existieren, sodass über jeden beliebigen Horizont  $[0, T]$  mit  $T \geq T_1 + T_2$  und für jede optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_T 2.1$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  gilt:

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}_{\text{TP}}(t)\|_2 \leq \epsilon, \quad \forall t \in [T_1, T - T_2]. \quad (2.18)$$

Es ist hervorzuheben, dass die Zeitspannen  $T_1$ , in der Zustand  $\mathbf{x}_T^*(t)$  zur Turnpike strebt, und  $T_2$ , in der er die Turnpike verlässt, unabhängig von der Länge  $T$  des Horizontes sind. Das ist ein zentrales Merkmal.

Für gegebene Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sowie unterschiedliche Längen  $T$  des Horizontes zeigt Abbildung 2.4, S. 25, den in der Literatur häufig betrachteten autonomen Fall. Für diesen ist die Turnpike keine Trajektorie, sondern ein stationärer Punkt  $\mathbf{x}_{\text{TP}} \in \mathbb{R}^n$ . Dieser Fall tritt für

gewöhnlich ein, wenn der Integrand des Gütemaßes (2.3) und die Systemdynamik (2.1a) abgesehen von den Zuständen  $\mathbf{x}(t)$  und den Stellgrößen  $\mathbf{u}(t)$  *autonom* sind, folglich unabhängig von der Zeit  $t$ . Das ist für das Problem OFP<sub>∞</sub>2.1 nur erfüllt, falls  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \text{const}$  gilt. Nach [43, Kapitel 4] ist die Turnpike dann ein stationärer Zustand der Systemdynamik, der daher

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{TP}} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{\text{TP}} + \mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

erfüllt und für den der Integrand des Gütefunktional (2.3) ein globales Minimum annimmt. Das Paar  $(\mathbf{x}_{\text{TP}}, \mathbf{u}_{\text{TP}})$  ist demnach durch die Lösung eines statischen Optimierungsproblems bestimmt. Jede Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die für  $t \rightarrow \infty$  zu dieser Turnpike konvergiert, weist außerdem ein optimales stationäres Verhalten auf. Hierdurch ist für den autonomen Fall eine Verbindung zur Definition 2.4 hergestellt.

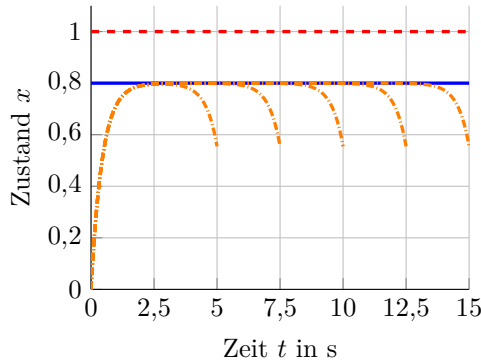
In [43] und [60] wird unter bestimmten Annahmen belegt, dass der Zustand  $\mathbf{x}^*(t)$  einer aufholend optimalen Lösung des zugehörigen Problems über einen unendlichen Horizont zu diesem optimalen stationären Zustand

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_{\text{TP}} \quad (2.20)$$

konvergiert. Dieser Zusammenhang wird in [167] genutzt, um eine Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub>2.1 für das einfache Szenario konstanter Soll- und Störgrößen zu konstruieren. Wie man erkennt, ist die Turnpike-Eigenschaft somit auch für Probleme über unendliche Horizonte von Interesse. Sind der Integrand oder die Systemdynamik jedoch aufgrund eines zeitabhängigen Zustandes  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  nicht autonom, wie für die optimalen Folgeregelungsprobleme OFP<sub>∞</sub>2.1 und OFP<sub>T</sub>2.1 zu erwarten ist, dann gestaltet sich die Analyse deutlich komplexer. Zunächst sind meist zahlreiche Annahmen, die nicht immer alle für die Probleme OFP<sub>∞</sub>2.1 und OFP<sub>T</sub>2.1 zutreffen, vorausgesetzt, damit Schlussfolgerungen gezogen werden können, wie z. B. in [171, 173, 174]. Insbesondere existiert im Allgemeinen keine einfache Methode, um eine Turnpike explizit zu bestimmen. Im Gegensatz zu [173, Kapitel 2], beschränkt sich die Betrachtung hier auch nicht auf periodische Solltrajektorien und Störungen. Für diese könnte nach [173] zumindest die Turnpike als periodische Funktion angesetzt werden und mittels eines *periodischen* optimalen Regelungsproblems<sup>6)</sup> gelöst werden.

Aus den genannten Gründen wird in dieser Arbeit in umgekehrter Weise vorgegangen: Es wird gezeigt, wie mithilfe der Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub>2.1 auf einfachem Wege eine generell zeitabhängige Turnpike

<sup>6)</sup>Für den linear-quadratischen Fall sei z. B. auf [124] verwiesen.



**Abbildung 2.4:** Darstellung der Turnpike (—), der Solltrajektorie (---) und der optimalen Lösungen (---) über verschiedene endliche Horizonte zum Beispiel 2.2.

$\mathbf{x}_{\text{TP}}(t)$  für das Problem  $\text{OFP}_T 2.1$  konstruiert werden kann. Dies wird gelingen, selbst wenn diese nicht periodisch ist. Daraus werden auch einfache hinreichende Voraussetzungen gewonnen, sodass für das Problem  $\text{OFP}_T 2.1$  eine Turnpike-Eigenschaft vorliegt. Außerdem qualifiziert sich so auch die Lösung von Problem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  als eine phasenweise Approximation der Lösung von Problem  $\text{OFP}_T 2.1$ . Das erweist sich als nützlich, falls ein langer endlicher aber unbekannter Horizont vorliegt und die Lösung von Problem  $\text{OFP}_T 2.1$  nicht im Voraus bestimmt werden kann. Wie solche Approximationen konstruiert werden können, ist z. B. in [7] beschrieben.

**Beispiel 2.2.** Betrachtet wird die Minimierung von

$$J_{0,T}(0, 1, u(\cdot)) = \int_0^T (4(x - \bar{y})^2 + u^2) dt \quad (2.21)$$

durch die Wahl von  $u_T(\cdot)$  auf dem Intervall  $[0, T]$  unter Berücksichtigung der Dynamik  $\dot{x} = -x + u$  mit  $x_0 = 0$  und der Lösung  $\bar{y} = \bar{x} = 1$  des Exosystems  $\dot{\bar{x}} = 0$  mit  $\bar{x}_0 = 1$ . Wie auf S. 24 erläutert, liegt hier ein autonomes Problem vor. Die Zustände  $x_T^*(t)$  der optimalen Lösungen (---) der jeweiligen optimalen Regelungsprobleme für

$$T \in \{5 \text{ s}; 7,5 \text{ s}; 10 \text{ s}; 12,5 \text{ s}; 15 \text{ s}\} \quad (2.22)$$

sind jeweils über die Intervalle  $[0, T]$  in Abbildung 2.4 aufgetragen. Diese streben zur Turnpike  $x_{\text{TP}} = 0,8$  (—), die von der Referenz (---) abweicht,

und verlassen diese erst am Ende des jeweiligen Horizontes  $[0, T]$ . Letzteres ist durch eine sogenannte *Transversalitätsbedingung* zu erklären, die die optimalen Lösungen einhalten und die im nächsten Abschnitt erläutert wird. Es ist zu erkennen, dass das Verhalten unabhängig von der Länge  $T$  des Horizontes ist. Die Turnpike  $x_{\text{TP}} = 0,8$  ist durch das Argument des statischen Optimierungsproblems

$$\min_{x,u} 4(x-1)^2 + u^2 \quad (2.23a)$$

$$\text{u.d.Nb. } 0 = -x + u. \quad (2.23b)$$

bestimmt.

### Agreeable Plan

In Kapitel 3 wird festgestellt werden, dass man unter bestimmten Bedingungen weder von der Existenz einer Lösung des Problems  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  noch von der Existenz einer Turnpike ausgehen kann. Aus den gleichen Gründen wie zuvor ist man aber an einer Approximation der Lösung des Problems  $\text{OFP}_{T 2.1}$  interessiert. Unter diesen Gegebenheiten ist das Konzept des *Agreeable Plan* nützlich. Dieses geht auf [78] zurück und ist darin durch Beispiele motiviert, für die eine schwach überholend optimale Lösung nicht existiert. Die Eigenschaften eines Agreeable Plan werden in [77] (für zeitdiskrete Systeme) näher untersucht.

Die Idee wird ähnlich wie in [78] beschrieben: Angenommen, ein langer Horizont  $[0, T]$  ist nicht genau bekannt und die optimale Lösung von Problem  $\text{OFP}_{T 2.1}$  ist daher nicht bestimmbar. Es ist aber davon auszugehen, dass man zu einem noch unbekannten Zeitpunkt  $T_{\text{AP}} > 0$  vom Ende  $T$  des Horizontes erfahren wird und das auch mit einem hinreichendem Abstand  $T - T_{\text{AP}} > 0$ . Dann ist es möglich, sich darauf zu *einigen*, mit der folgenden Lösung, dem sogenannten Agreeable Plan, zu beginnen. Sie wird bis zum Zeitpunkt  $T_{\text{AP}}$ , demnach über das Intervall  $[0, T_{\text{AP}}]$  des Horizontes, angewendet und erst auf dem verbleibenden Teilintervall  $[T_{\text{AP}}, T]$  durch eine dort bestimmbare optimale Lösung ersetzt. Die in Summe anfallenden Kosten über den Horizont  $[0, T]$  sind dabei nur unwesentlich höher als die minimalen Kosten, die für die a priori nicht bestimmbare optimale Lösung angefallen wären. Am Ende dieses Abschnittes veranschaulicht dies die Abbildung 2.5 zum Beispiel 2.3, S. 28.

Aus den Überlegungen entsteht die Definition in der Variante von [83]:

**Definition 2.7.** Es seien ein Kostenfunktional  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  sowie die Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  gegeben. Eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_{\text{AP}}(\cdot), \mathbf{u}_{\text{AP}}(\cdot))$

heißt Agreeable Plan, falls für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $T_{\text{AP}} > 0$  ein  $\hat{T}(\epsilon, T_{\text{AP}}) \geq 0$  existiert, sodass

$$\epsilon \geq J_{0,T_{\text{AP}}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_{\text{AP}}(\cdot)) + J_{T_{\text{AP}},T}(\mathbf{x}_{\text{AP}}(T_{\text{AP}}), \bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}}), \mathbf{u}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \quad (2.24)$$

für jedes  $T \geq \hat{T}(\epsilon, T_{\text{AP}})$  gilt, wobei  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  durch die Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>2.1 auf  $[0, T]$  und  $\mathbf{u}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot)$  durch die Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>2.1 auf  $[T_{\text{AP}}, T]$  mit den Anfangswerten  $\mathbf{x}_{\text{AP}}(T_{\text{AP}})$  und  $\bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}})$  gegeben sind.

Da  $T$  beliebig groß sein darf, kann die Definition 2.7 nach [42] überprüft werden, indem für die positive rechte Seite der Ungleichung (2.24) der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0,T_{\text{AP}}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_{\text{AP}}(\cdot)) + J_{T_{\text{AP}},T}(\mathbf{x}_{\text{AP}}(T_{\text{AP}}), \bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}}), \mathbf{u}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \right) = 0 \quad (2.25)$$

für jedes  $T_{\text{AP}} > 0$  nachgewiesen wird. Der Grenzwert in null ist durch eine beliebige kleine Wahl von  $\epsilon > 0$  begründet.

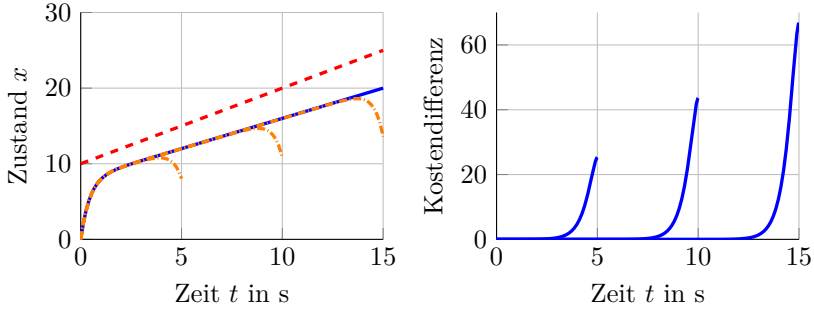
In Kapitel 3 wird ein Lösungskandidat für das optimale Folgeregelungsproblem OFP<sub>∞</sub>2.1 hergeleitet, für den zwar unter gewissen Bedingungen keine Optimalität (wie (SO) oder (ÜO)) nachgewiesen werden kann, der aber zumindest immer noch einen Agreeable Plan darstellt.

Falls eine Turnpike  $\mathbf{x}_{\text{TP}}(\cdot)$  zum Problem OFP<sub>T</sub>2.1 existiert, so wird in Kapitel 3 belegt, dass  $\mathbf{x}_{\text{AP}}(\cdot)$  zu dieser Turnpike konvergiert. Das Intervall  $[T - T_2, T]$ , auf dem die optimale Trajektorie  $\mathbf{x}_T^*(\cdot)$  die Turnpike verlässt, korrespondiert zu dem Intervall  $[T_{\text{AP}}, T]$ , auf dem der Agreeable Plan durch eine optimale Lösung ersetzt wird. Es gibt hierbei aber einen elementaren Unterschied der beiden Konzepte. Wie bemerkt, darf nach Definition 2.6 die Zeitspanne  $T_2$  nicht von der Länge  $T$  des Horizontes und damit auch nicht von  $T - T_2$  abhängen. Im Gegensatz dazu darf die Zeitspanne  $T - T_{\text{AP}}$  mit  $T \geq \hat{T}(\cdot, T_{\text{AP}})$  explizit von  $T_{\text{AP}}$  abhängig sein. Wegen dieses Unterschieds, kann unter bestimmten Bedingungen keine Turnpike, aber trotzdem ein Agreeable Plan existieren. In diesem Fall wird die untere Schranke

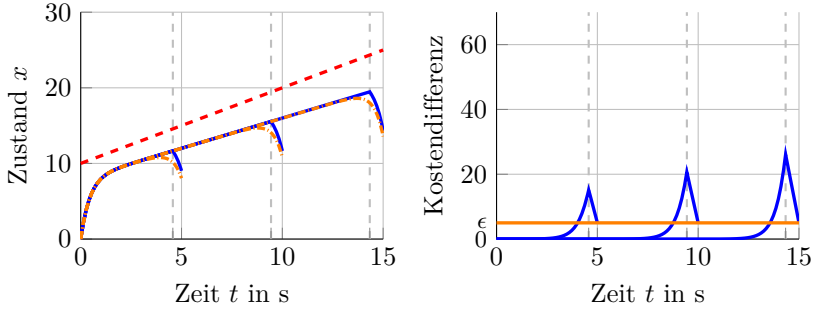
$$T - T_{\text{AP}} \geq \hat{T}(\cdot, T_{\text{AP}}) - T_{\text{AP}} \quad (2.26)$$

gewöhnlich mit  $T_{\text{AP}}$  anwachsen.

Folglich ist ein Agreeable Plan insbesondere dann von Interesse, wenn weder starke oder (schwach) überholende Optimalität noch die Existenz



(a) Agreeable Plan

(b) Agreeable Plan mit Umschalten nach  $T_{AP,i}$ 

**Abbildung 2.5:** Darstellung zu Beispiel 2.3 für den Agreeable Plan bzw. die zusammengesetzten Lösungen (—), die Solltrajektorie (---) und die optimalen Lösungen (---) über verschiedene endliche Horizonte.

einer Turnpike nachgewiesen werden kann. In Kapitel 3 wird das für unbeschränkte Solltrajektorien oder Störgrößen aufgezeigt.

**Beispiel 2.3.** Es wird die gleiche Problemstellung wie in Beispiel 2.2 betrachtet, jedoch sei die Solltrajektorie  $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}$  und das Exosystem

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \quad (2.27)$$

mit  $\bar{x}_0^T = \begin{bmatrix} 10 & 1 \end{bmatrix}$  gegeben. Daraus folgt

$$\bar{y}(t) = 10 + t. \quad (2.28)$$

Abbildung 2.5 zeigt links die Referenz  $\bar{y}(t)$  (—), die Zustände  $x_T^*(t)$  (---) der optimalen Lösungen der optimalen Regelungsprobleme für

$$T \in \{5 \text{ s}; 10 \text{ s}; 15 \text{ s}\} \quad (2.29)$$

auf dem jeweiligen Intervall  $[0, T]$ , den Agreeable Plan  $x_{AP}(t)$  (—) in Abbildung 2.5a und die Zustände  $\hat{x}_T(t)$  von zusammengesetzten Lösungen  $(\hat{x}_T(t), \hat{u}_T(t))$  (—) jeweils über  $[0, T]$  in Abbildung 2.5b. Die zusammengesetzten Lösungen schalten zu den Zeitpunkten

$$T_{AP,i} \in \{4,57 \text{ s}; 9,44 \text{ s}; 14,34 \text{ s}\} \quad (2.30)$$

von der Stellgröße  $\hat{u}_T(t) = u_{AP}(t)$  des Agreeable Plan zu einer optimalen Stellgrößen  $\hat{u}_T(t) = u_{T_{AP,i},T}^*(t)$  auf  $[T_{AP,i}, T]$  um. Rechts sind die Kostendifferenzen  $J_{0,T}(0, u_{AP}(\cdot)) - J_{0,T}(0, u_T^*(\cdot))$  in Abbildung 2.5a und  $J_{0,T}(0, \hat{u}_T(\cdot)) - J_{0,T}(0, u_T^*(\cdot))$  in Abbildung 2.5b aufgetragen (---). Wie in Abbildung 2.5a zu sehen ist, sind die Unterschiede des Agreeable Plan (—) und der optimalen Lösung (---) erst am Ende jedes Horizontes  $[0, T]$  ausschlaggebend, wodurch die Kostendifferenz erst zum Ende hin zunimmt. Es reicht daher aus, zu einem Zeitpunkt  $T_{AP}$  (---) kurz vor Ende jedes Horizontes vom Agreeable Plan auf eine optimale Lösung umzuschalten, um die Kostendifferenz unterhalb einer gewünschten Schranke  $\epsilon = 5$  (—) zu halten. Dies wird von der zusammengesetzten Lösung (—) im Grenzfall  $\hat{T}(5, T_{AP,i}) = T$  gerade gewährleistet, wie Abbildung 2.5b zeigt. Es ist auch zu erkennen, dass bei zunehmendem Horizont „früher“ umgeschaltet werden muss, d. h.  $T - T_{AP,i}$  muss für größere  $T$  zunehmen.

## 2.3 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung ist eine gängige Methode zur Lösung dynamischer Optimierungsprobleme. Ein klassisches Beispiel ist das Brachistochrone-Problem (siehe z. B. [125], [38]). Bei diesem sucht man die Bahn einer Kugel in der vertikalen Ebene, auf der zwei vorgegebene Punkte durch den Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit durchlaufen werden. In allgemeiner Form lautet das Problem der Variationsrechnung:

$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b l(x, \dot{x}, t) dt \quad (2.31)$$



unter Nebenbedingungen wie vorgegebenen Anfangswert  $x(a)$  und Endwert  $x(b)$ . Eine notwendige Optimalitätsbedingung führt auf die bekannte Euler-Lagrange-Differenzialgleichung

$$\frac{\partial l(t, x, \dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (2.32)$$

Diese ist in der technischen Mechanik als Lagrangesche Gleichung zweiter Art geläufig und wird zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen konservativer mechanischer Systeme genutzt, wobei  $l(\cdot)$  der Differenz aus kinetischer und potentieller Energie entspricht (siehe z. B. [75]).

In diesem Abschnitt wird unter anderem gezeigt, wie notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für optimale Regelungsprobleme wie OFP<sub>T</sub>2.1 mithilfe der Variationsrechnung hergeleitet werden können. Das grundlegende Vorgehen wird später in der Beweisführung in Kapitel 3 und in den Herleitungen von Kapitel 4 angewendet. Im Folgenden werden die Kenntnisse zu Lösungen (beschränkter) statischer Optimierungsprobleme aus Anhang A.2, ab S. 217, vorausgesetzt.

### 2.3.1 Allgemeiner Fall

Es sei das Gütefunktional

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^T L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (2.33)$$

und die Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.34)$$

gegeben. Die reellwertigen Funktionen  $L(\cdot)$  und  $\mathbf{f}(\cdot)$  seien hinreichend oft stetig partiell differenzierbar in ihren Argumenten. Gesucht werden notwendige Bedingungen, die eine zulässige<sup>7)</sup> optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des dynamischen Optimierungsproblems:

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)} J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) \quad (2.35)$$

unter den Nebenbedingungen der Systemdynamik (2.34) und eines gegebenen Anfangswertes  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  erfüllen muss. Die folgenden Ausführungen zur Variationsrechnung sind an [13, 39] orientiert. Einen verständlichen Einstieg bietet [62].

<sup>7)</sup>Nach Definition 2.2, S. 15, wobei hier die Systemdynamik (2.34) erfüllt werden muss.

### Variationen

Zunächst wird der Begriff der Variation eingeführt. Es sei angenommen, dass eine optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  bekannt ist. Wie in [13, 39] sei angenommen, dass es möglich ist, eine beliebige zulässige Lösung durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_T^*(t) + \epsilon \delta \mathbf{x}(t) + o(\epsilon), \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_T^*(t) + \epsilon \delta \mathbf{u}(t) \quad (2.36b)$$

auszudrücken, wobei  $\epsilon \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x}(t)$  ein nicht näher spezifiziertes Restglied von der Ordnung<sup>8)</sup>  $o(\epsilon)$  enthält. Die Funktionen  $\delta \mathbf{x}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\delta \mathbf{u}(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißen *Variationen*. Die Variation ist zulässig, falls sie eine Lösung der Dynamik

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \delta \mathbf{u} \quad (2.37)$$

zum Anfangswert  $\delta \mathbf{x}(0) = 0$  ist<sup>9)</sup> und für sie die Anforderungen aus Definition 2.2 gelten. Der Anfangswert  $\delta \mathbf{x}(0) = 0$  resultiert daraus, dass alle zulässigen Trajektorien  $\mathbf{x}(\cdot)$  den selben Anfangswert, nämlich  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_T^*(0) = \mathbf{x}_0$ , haben. Es ist hervorzuheben, dass damit für eine gegebene zulässige Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  die Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die mittels (2.36) aus einer beliebigen Wahl von  $\epsilon$  und eines geeigneten Restglieds von der Ordnung  $o(\epsilon)$  hervorgeht, ebenfalls zulässig ist und daher die Systemdynamik (2.34) erfüllt.

### Reduktion auf ein statisches Optimierungsproblem

Die Variationen können zu einer Umformulierung der Problemstellung genutzt werden. Die Optimalität von  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  verlangt

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) \quad (2.38)$$

für jede beliebige zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ . Durch Ersetzung dieser mittels (2.36) erhält man für die rechte Seite

$$J_{0,T}^\epsilon(\epsilon) := J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot) + \epsilon \delta \mathbf{u}(\cdot)). \quad (2.39)$$

Da die Ungleichung (2.38) bei festgehaltener Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  für beliebig kleine  $|\epsilon|$  erfüllt sein muss und  $J_{0,T}^\epsilon(0) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  gilt, muss

<sup>8)</sup>Siehe Definition A.4 in Anhang A.1, S. 216.

<sup>9)</sup>Hier wird die verkürzte Notation für eine Funktion:  $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \cdot)|_* = g(\mathbf{x}_T^*, \mathbf{u}_T^*, \cdot)$  genutzt.

folglich die Funktion  $J_{0,T}^\epsilon(\epsilon)$  in  $\epsilon = 0$  ein globales Minimum annehmen. Die Herleitung notwendiger Bedingungen für das dynamische Optimierungsproblem führt daher mithilfe der Variationsrechnung auf die notwendigen Bedingungen eines statischen Optimierungsproblems [62].

Diese werden nun bestimmt. Dazu entwickelt man  $J_{0,T}^\epsilon(\epsilon)$  in einer Taylorreihe im Punkt  $\epsilon = 0$  und erhält  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  in der Form

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) + \epsilon \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) + \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) + o(\epsilon^2). \quad (2.40)$$

Hierin heißt  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  die *erste Variation der Kosten*  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) + \epsilon \delta \mathbf{u}(\cdot)$  und ist durch

$$\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) := \left. \frac{dJ_{0,T}^\epsilon(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (2.41)$$

bestimmt. Die *zweite Variation der Kosten* ist

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) := \left. \frac{d^2 J_{0,T}^\epsilon(\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.42)$$

Damit das Gütemaß (2.40) in  $\epsilon = 0$  ein Minimum annimmt, müssen die *notwendigen Bedingungen erster Ordnung*

$$\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = 0 \quad (2.43)$$

und *zweiter Ordnung*

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq 0 \quad (2.44)$$

für statische Optimierungsprobleme gelten (vergleiche Anhang A.2). Jede beliebige Variation  $(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{u})$  ist *zulässig*, wenn sie eine zulässige Lösung der linearen Dynamik (2.37) ist. Daher müssen die Bedingungen (2.43) und (2.44) für alle zulässigen Variationen erfüllt sein. Im Folgenden werden diese Bedingungen genauer analysiert.

## Notwendige Optimalitätsbedingungen

Für den weiteren Verlauf ist es hilfreich, die Systemdynamik (2.34) als Nebenbedingung explizit zu berücksichtigen. Das ist auf ähnliche Weise möglich wie bei der Methode der Lagrange-Multiplikatoren für beschränkte statische Optimierungsprobleme in Anhang A.2.2, ab S.219. Allerdings muss die Nebenbedingung (2.34) zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$

eingehalten werden. Daher wird ein zeitabhängiger Lagrange-Multiplikator  $\phi_T(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eingeführt, der als *Kozustand* bezeichnet wird. Zur kompakteren Darstellung verwendet man die *Hamilton-Funktion*

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \phi_T^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.45)$$

Auf Basis der Nebenbedingung (2.34) ist es möglich, das Gütefunktional (2.33) für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  äquivalent auszudrücken durch

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^T \left( H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t) - \phi_T^\top \dot{\mathbf{x}} \right) dt. \quad (2.46)$$

Durch partielle Integration wird der Ausdruck noch umgeschrieben:

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^T \left( H(\cdot) + \dot{\phi}_T^\top \mathbf{x} \right) dt + \phi_T(0)^\top \mathbf{x}_0 - \phi_T(T)^\top \mathbf{x}(T). \quad (2.47)$$

Nachdem darin  $\mathbf{x}(\cdot)$  und  $\mathbf{u}(\cdot)$  mittels der Variationen (2.36) ausgedrückt werden, lässt sich die erste Variation gemäß (2.41) berechnen. Unter Anwendung der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) &= \int_0^T \left( \left( \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)_* + \dot{\phi}_T \right)^\top \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \Big|_* \delta \mathbf{u} \Big) dt \\ &\quad + \phi_T(0)^\top \delta \mathbf{x}(0) - \phi_T(T)^\top \delta \mathbf{x}(T). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aus der Gl. (2.48) können nun Bedingungen für eine optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  abgeleitet werden, sodass für jede zulässige Variation  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = 0$  erfüllt ist. Zuerst ist festzustellen, dass  $\phi_T(0)^\top \delta \mathbf{x}(0)$  aufgrund von  $\delta \mathbf{x}(0) = 0$  entfällt. Da der Kozustand frei gewählt werden kann, eliminiert man die von diesem abhängigen Terme durch Vorgabe der Dynamik für den Kozustand

$$\dot{\phi}_T = - \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* \quad (2.49)$$

mit dem Endwert  $\phi_T(T) = \mathbf{0}$ . Es verbleibt

$$\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^T \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \Big|_* \delta \mathbf{u} dt. \quad (2.50)$$

Das Integral muss folglich identisch null sein für jede beliebige stückweise stetige Funktion  $\delta \mathbf{u}(\cdot)$ , um die notwendige Bedingung erster Ordnung (2.43) zu gewährleisten. Nach dem *fundamentalen Lemma A.1 der Variationsrechnung* aus Anhang A erfordert das notwendigerweise

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* = \mathbf{0}. \quad (2.51)$$

Zusammengefasst ergeben sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für eine optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  zu

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \quad (2.52a)$$

$$\dot{\phi}_T = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \quad (2.52b)$$

$$\phi_T(T) = \mathbf{0}. \quad (2.52c)$$

Diese heißen auch *Euler-Lagrange Gleichungen*. Die Kozustandsdynamik (2.52b) bestimmt den Verlauf des Kozustandes  $\phi_T(t)$  in Abhängigkeit der optimalen Lösung und der sogenannten *Transversalitätsbedingung* (2.52c). Durch (2.52a) wird garantiert, dass die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für ein Extremum der Hamilton-Funktion entlang der optimalen Lösung und zu jedem Zeitpunkt erfüllt ist. Falls ein Extremum vorliegt, so muss dieses ein Minimum sein, wie die folgende Analyse der notwendigen Bedingung zweiter Ordnung (2.44) zeigt.

Erneut ersetzt man  $\mathbf{x}(\cdot)$  und  $\mathbf{u}(\cdot)$  mittels der Variationen durch (2.36) in  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  in (2.46). Der Ausdruck wird zweimal nach  $\epsilon$  abgeleitet und danach  $\epsilon = 0$  ersetzt. So erhält man die zweite Variation<sup>10)</sup>

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^T \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{u} \end{bmatrix}^\top \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}^2} \end{array} \right] \Big|_* \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{u} \end{bmatrix} dt. \quad (2.53)$$

Da  $\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq 0$  für jede stückweise stetige Funktion  $\delta \mathbf{u}(\cdot)$  gelten muss, ist z. B. aus [74, Theorem 3.14] bekannt, dass

$$\left. \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_* \succeq \mathbf{0} \quad (2.54)$$

<sup>10)</sup>Hier wurde bereits die Bedingung (2.43) für  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  angewendet. Dadurch entfällt der Einfluss des Restglieds von (2.36a). Für Details siehe [13, Abschn. 5-7].

für alle  $t \in [0, T]$  eine notwendige Bedingung zweiter Ordnung ist. Diese heißt *Legendre-Clebsch Bedingung*. Ist darüber hinaus die *verschärfte* Legendre-Clebsch Bedingung erfüllt, dann ist die Hesse-Matrix in (2.54) positiv definit für alle  $t$  und die Hamilton-Funktion nimmt ein Minimum an [13, Theorem 5-3]. Da  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  das dynamische Optimierungsproblem löst und nicht nur eine lokale optimale Lösung ist, liegt nach [13, Abschnitt 5-7] ein globales Minimum vor und es gilt

$$\mathbf{u}_T^*(t) = \arg \min_{\mathbf{u}(t)} H(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}(t), \phi_T(t), t), \quad (2.55)$$

wobei  $\phi_T(t)$  die Kozustandsdynamik (2.52b) und die Transversalitätsbedingung (2.52c) erfüllt. Damit gehen die gefundenen Bedingungen in die des Minimumprinzips von Pontrjagin über (siehe z. B. [13, 62, 74]). Dieses gibt notwendige Bedingungen für das dynamische Optimierungsproblem unter Stellgrößenbeschränkungen an und wird daher nicht näher betrachtet.

### Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Die hergeleiteten notwendigen Optimalitätsbedingungen (2.52) und (2.54) können genutzt werden, um Kandidaten für eine optimale Lösung zu bestimmen. Um Optimalität zu verifizieren, bedarf es zusätzlich hinreichender Optimalitätsbedingungen. Sei  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  ein Kandidat, dann gilt

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) + \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) + o(\epsilon^2) \quad (2.56)$$

für die Taylorreihe (2.40) aufgrund der erfüllten notwendigen Bedingung (2.43). In Analogie zu statischen Optimierungsproblemen in Anhang A.2 ist man geneigt anzunehmen, dass für jede zulässige, *nicht triviale* Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) > 0 \quad (2.57)$$

eine hinreichende Optimalitätsbedingung für ein lokales Minimum<sup>11)</sup> in  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  sei. Dies ist jedoch nur dann immer der Fall, wenn das Restglied in (2.56) identisch null ist und somit entfällt. Grundlage zu der

<sup>11)</sup>Für lokale Minima muss Ungleichung (2.38) nur für Variationen gelten, die bspw.  $\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 + M_u \cdot \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_T^*(t)\|_2 \leq M_\delta$  für ein gegebenes  $M_\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $M_u \in \{0; 1\}$  erfüllen. Man spricht für  $M_u = 1$  von einem schwachen und für  $M_u = 0$  von einem starken lokalen Minimum. Vergleiche hierzu [33, 38, 39].

Annahme ist die Überlegung, dass es eine lokale Analyse erlaubt, nur beliebig kleine  $|\epsilon|$  zu berücksichtigen und daher das Restglied von der Ordnung  $o(\epsilon^2)$  gegenüber Termen  $\sim \epsilon^2$  vernachlässigbar sei. Dies muss aber nicht immer zutreffen. So können Variationen existieren, für die  $\frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  die selbe Größenordnung annimmt wie das Restglied [38]. Abhilfe schaffen zusätzliche Anforderungen an  $\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  wie in [13, Theorem 5-4], bei denen die Terme höherer Ordnung mitberücksichtigt werden. Üblicher ist es, Bedingungen verschieden von (2.57) zu prüfen, wie in [39, Abschnitt 6.3] oder [74, Abschnitt 3.3.5]. Letztere erlauben auch den Rückschluss auf ein globales Minimum. Diese werden nicht weiter erläutert, da bei allen im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Problemen das Restglied entfallen wird.

### Unendlicher Horizont

Die bisherige Analyse hat sich auf endliche Horizonte beschränkt. Es stellt sich die Frage, ob die erzielten notwendigen Bedingungen auf den unendlichen Horizont  $T \rightarrow \infty$  übertragen werden können. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht möglich. Die gezeigte Herleitung basierte auf Bedingungen für ein Minimum von

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot) + \epsilon \delta \mathbf{u}(\cdot)) \quad (2.58)$$

in  $\epsilon = 0$ . Eine notwendige Bedingung  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = 0$  in (2.43) folgte aus einer Analyse der Taylorreihe (2.40). Dem lag zugrunde, dass der Term  $\epsilon \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$ , der linear in  $\epsilon$  ist, den quadratischen Term  $\frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  für hinreichend kleine  $|\epsilon|$  überwiegt, da die zweite Variation  $\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  immer beschränkt ist. Letzteres ist aber für  $T \rightarrow \infty$  im Allgemeinen nicht mehr gegeben, weshalb die Bedingung (2.43) zwar in  $\lim_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = 0$  übergehen würde, diese aber *nicht* mehr notwendig ist.

Die Herleitung notwendiger Bedingungen über unendliche Horizonte erfolgt daher in Abschnitt 2.5.1 auf anderem Wege, nämlich durch Einbeziehung der endlichen Optimalität aus Definition 2.3(iv), S. 17. Dabei wird sich herausstellen, dass die Transversalitätsbedingung (2.52c) entfällt.

### 2.3.2 Linear-quadratischer Fall

Die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten Bedingungen werden nun für die linear-quadratische Problemstellung OFP<sub>T</sub>2.1 konkretisiert. Dann gilt

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}), \quad (2.59a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.59b)$$

mit  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ , wobei die Abhängigkeit von  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  als explizite Zeitabhängigkeit aufgefasst werden kann. Unter Nutzung der Ausgangsgleichung (2.1b) und der Solltrajektorie (2.2b) resultiert für die Hamilton-Funktion:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t) = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{C}\mathbf{x} + (\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{C}\mathbf{x} + (\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \right) + \phi_T^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}). \quad (2.60)$$

Aus der notwendigen Bedingung erster Ordnung (2.52a) folgt zunächst

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* = \mathbf{R}\mathbf{u}_T^* + \mathbf{B}^\top \phi_T = \mathbf{0}. \quad (2.61)$$

Da  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ , erhält man durch Auflösen

$$\mathbf{u}_T^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \phi_T(t). \quad (2.62)$$

Weiterhin wird mittels der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung (2.52b) die Kozustandsdynamik

$$\dot{\phi}_T = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_* = -\mathbf{A}^\top \phi_T - \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{C}\mathbf{x}_T^* + (\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.63)$$

bestimmt. Setzt man (2.62) in die Systemdynamik  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}$  aus (2.1a) ein, so kann diese durch

$$\dot{\mathbf{x}}_T^* = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \phi_T} \right|_* \quad (2.64)$$

ausgedrückt werden. Die Zusammenfassung mit der Kozustandsdynamik führt dadurch auf das sogenannte *Hamiltonsche System*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_T^* \\ \dot{\phi}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_T^* \\ \phi_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{C} \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad (2.65)$$



mit denen aus Anfangswert und Transversalitätsbedingung (2.52c) gewonnenen Randbedingungen

$$\mathbf{x}_T^*(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.66a)$$

$$\boldsymbol{\phi}_T(T) = \mathbf{0}. \quad (2.66b)$$

Die eindeutige Lösung liefert in Verbindung mit (2.62) einen Kandidaten

$$(\mathbf{x}_T^*(\cdot), -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \boldsymbol{\phi}_T(\cdot)). \quad (2.67)$$

Für diesen ist die Erfüllung der notwendigen Bedingung zweiter Ordnung (2.54) durch die verschärfte Legendre-Clebsch Bedingung

$$\left. \frac{\partial^2 H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}_T, t)}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_* = \mathbf{R} \succ \mathbf{0} \quad (2.68)$$

bereits impliziert. Hinsichtlich hinreichender Bedingungen ist vorerst festzustellen, dass eine zulässige Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  in Folge der Berechnung der Dynamik (2.37) der Variation durch

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (2.69)$$

für  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  bestimmt wird. Außerdem entfällt trivialerweise das Restglied in (2.36) aufgrund der linearen Systemdynamik (2.1a). Dadurch ist es möglich, jede beliebige zulässige Lösung für ein beliebiges  $\epsilon \in \mathbb{R}$  durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_T^*(t) + \epsilon \delta \mathbf{x}(t), \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_T^*(t) + \epsilon \delta \mathbf{u}(t) \quad (2.70b)$$

auszudrücken, indem man eine geeignete Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  wählt. Dies erlaubt es beispielsweise, ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\epsilon = 1$  zu setzen. Weiterhin ist der Integrand der Kosten  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  nach (2.3) quadratisch in  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$ . Aus diesen Gründen entfällt auch das Restglied in der Taylorreihe (2.40):

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) + \epsilon \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) + \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)). \quad (2.71)$$

Wegen (2.65) und (2.66) entfällt die erste Variation  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = 0$ . Dann ist es ersichtlich, dass die Bedingung (2.57)

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) > 0 \quad (2.72)$$

für jede zulässige, nicht triviale Variation hinreichend für ein eindeutiges, globales Minimum im linear-quadratischen Fall ist. Da jede beliebige zulässige Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  und jedes beliebige  $\epsilon$  gewählt werden kann, ist nämlich impliziert, dass  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) > J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  gilt. Zur Überprüfung der Optimalität muss demnach lediglich das Vorzeichen der zweiten Variation untersucht werden, die nach (2.53) gegeben ist zu

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^T \delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u} \, dt. \quad (2.73)$$

## 2.4 Optimale Regelungen über endliche Horizonte

Im Folgenden wird das linear-quadratische Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{T2.1}$  über einen endlichen Horizont  $T$  gelöst. Die Lösung dient zur Beurteilung der Güte der in Kapitel 3 hergeleiteten Lösung des Problems  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$ , falls lange endliche Horizonte betrachtet werden. Weiterhin wird ein optimales Regelungsproblem für einen vorgegebenen Endwert  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$  über einen endlichen Horizont gelöst. Die hier hergeleitete Darstellung der zugehörigen minimalen Kosten werden in der Beweisführung in Kapitel 3 verwendet.

### 2.4.1 Optimale Folgeregelung

In diesem Abschnitt wird die Lösung für das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{T2.1}$  über einen endlichen Horizont hergeleitet. Diese wird insbesondere in der Analyse in Kapitel 3 von Bedeutung sein.

Den Ausführungen in Abschnitt 2.3.2 folgend, sucht man eine Lösung für das Hamiltonsche System (2.65) mit den Randbedingungen (2.66). Um diese analytisch zu bestimmen, wird meistens ein bekannter und geeigneter Lösungsansatz für  $\phi_T(\cdot)$  nach der *Sweep-Methode*, die auf [39, Kapitel 5] zurückgeht, gewählt. Hier wird eine auf das Problem angepasste Variante der Sweep Methode aus [121, Abschnitt 3.2] angewendet. Alternativ wäre es auch möglich, zunächst ein erweitertes System bestehend aus dem System (2.1) und dem Exosystem (2.2) mit dem Zustand  $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$  aufzustellen. Dies entspräche einer Umformung des Problems  $\text{OFP}_{T2.1}$  in ein *Servo-*

*Problem* aus [6, Abschnitt 4.2] und würde die Anwendung der klassischen Sweep-Methode aus [39, Abschnitt 5.2] erlauben.

Wie in [121, Abschnitt 3.2] wird als geeigneter Ansatz

$$\phi_T(t) = P_T(t)x_T^*(t) + \Pi_T(t)\bar{x}(t) \quad (2.74)$$

mit  $P_T(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\Pi_T(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  gewählt. Das Einsetzen dieses Ansatzes für  $\phi_T(t)$  in das Hamiltonsche System (2.65) führt zur Dynamik des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{x}_T^* = (A - BR^{-1}B^T P_T(t))x_T^* + (-BR^{-1}B^T \Pi_T(t) + E_d)\bar{x} \quad (2.75)$$

und zu einer Bedingung zur Erfüllung der Kozustandsdynamik:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_T &= \dot{P}_T x_T^* + P_T \dot{x}_T^* + \dot{\Pi}_T \bar{x} + \Pi_T \dot{\bar{x}} \\ &= (-A^T P_T - C^T Q C)x_T^* + (-A^T \Pi_T + C^T Q(\bar{C} - D_d))\bar{x}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Wird in der letzten Gleichung  $\dot{x}_T^*$  mittels (2.75) und  $\dot{\bar{x}}$  mithilfe der Dynamik (2.2) des Exosystems ersetzt, so folgt nach Sortieren der Terme:

$$\begin{aligned} &(\dot{P}_T + P_T A + A^T P_T - P_T B R^{-1} B^T P_T + C^T Q C)x_T^* = \\ &(-\dot{\Pi}_T - \Pi_T \bar{A} - (A - B R^{-1} B^T P_T)^T \Pi_T - P_T E_d + C^T Q(\bar{C} - D_d))\bar{x}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Diese Gleichung muss zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  erfüllt sein. Dies ist garantiert, falls die Terme in Klammern auf der linken und rechten Seite identisch null sind. Darüber hinaus ist die Gleichung dann unabhängig von den vorliegenden Anfangswerten und damit für beliebige  $x_0$  und  $\bar{x}_0$  erfüllt. Daraus ergibt sich eine nichtlineare *Riccatische Matrixdifferenzialgleichung*

$$-\dot{P}_T = P_T A + A^T P_T - P_T B R^{-1} B^T P_T + C^T Q C \quad (2.78)$$

und eine lineare Matrixdifferenzialgleichung

$$-\dot{\Pi}_T = \Pi_T \bar{A} + (A - B R^{-1} B^T P_T)^T \Pi_T + P_T E_d + C^T Q(D_d - \bar{C}). \quad (2.79)$$

Die Transversalitätsbedingung  $\phi_T(T) = \mathbf{0}$  in (2.52c) wird ebenfalls für beliebige Anfangswerte  $x_0$  und  $\bar{x}_0$  eingehalten, wenn man die Endwerte  $P_T(T) = \mathbf{0}$  und  $\Pi_T(T) = \mathbf{0}$  wählt. Da hier Endwerte vorgegeben sind, müssen die beiden Matrixdifferenzialgleichungen rückwärts in der Zeit gelöst werden, um  $P_T(t)$  und  $\Pi_T(t)$  zu bestimmen.

Durch die Linearität von (2.79) ist die Existenz einer eindeutigen Lösung  $\mathbf{\Pi}_T(t)$  auf  $[0, T]$  für jedes gegebene  $T > 0$  und gegebene  $\mathbf{P}_T(t)$  garantiert. Für die nichtlineare Matrixdifferentialgleichung (2.78) ist dies nicht direkt ersichtlich. Es ist allerdings ein bekanntes Ergebnis, dass ebenfalls immer eine eindeutige Lösung  $\mathbf{P}_T(t)$  existiert, die wegen der symmetrischen Matrizen  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  positiv semidefinit  $\mathbf{P}_T(t) \succeq \mathbf{0}$  und symmetrisch ist. Siehe hierzu [34, Theorem 4.5] und [121, Theorem 3.1] sowie die ausführlichen Herleitungen in [6, Abschnitt 2.3].

Nun ist es möglich, folgenden Satz zu formulieren, der die aus der Literatur wie [121] bekannte Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems OFP<sub>T</sub>2.1 zusammenfasst:

**Satz 2.1** (Optimale Folgeregelung über endliche Horizonte). *Sei ein beliebiges  $T > 0$  gegeben und seien  $\mathbf{P}_T(t)$  die eindeutige Lösung der Riccati'schen Matrixdifferentialgleichung (2.79) zum Endwert  $\mathbf{P}_T(T) = \mathbf{0}$ , die symmetrisch und positiv semidefinit ist, sowie  $\mathbf{\Pi}_T(t)$  die Lösung von (2.79) zum Endwert  $\mathbf{\Pi}_T(T) = \mathbf{0}$ . Zu jedem beliebigen gegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  des Systems und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  des Exosystems ist die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  der Systemdynamik (2.1a) mit*

$$\mathbf{u}_T^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{P}_T(t) \mathbf{x}_T^*(t) + \mathbf{\Pi}_T(t) \bar{\mathbf{x}}(t)) \quad (2.80)$$

*die eindeutige optimale Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems OFP<sub>T</sub>2.1. D. h., dass das Gütemaß  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  ein globales Minimum von  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  unter allen zulässigen Lösungen  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  ist.*

*Beweis.* Auf Basis der Herleitungen in diesem Abschnitt sind die in Abschnitt 2.3.2 angegebenen notwendigen Optimalitätsbedingungen für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  durch die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  erfüllt. Daher gilt auch für beliebige, gegebene Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ :

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) = \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \quad (2.81)$$

für jede gegebene, zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$ . Zu jeder solchen Lösung existiert wegen (2.70) ein  $\epsilon \neq 0$  und eine Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$ , die (2.69) für  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  auf  $[0, T]$  erfüllt und für die  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  gilt. Letzteres ist aufgrund von  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  nur

möglich, falls ein stückweise stetiges  $\delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  vorliegt. Unter Einbeziehung von (2.73) und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  sowie  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \succeq \mathbf{0}$  resultiert

$$\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq \int_0^T \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u} \, dt > 0. \quad (2.82)$$

Daraus resultiert  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) > 0$  für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  und der Satz ist bewiesen.  $\square$

Abschließend sollen zwei praktische Aspekte hervorgehoben werden. Der Ansatz (2.74) hat es ermöglicht, eine optimale Regelung in der Form

$$\mathbf{u}_T^*(t) = -\mathbf{K}^*(t, T) \mathbf{x}_T^*(t) + \mathbf{F}^*(t, T) \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (2.83)$$

mit  $\mathbf{K}^*(t, T) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}_T(t)$  und  $\mathbf{F}^*(t, T) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\Pi}_T(t)$  für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  als auch  $\bar{\mathbf{x}}_0$  anzugeben. Dies ist aus praktischer Sicht sehr vorteilhaft, da eine Implementierung des Regelgesetzes (2.80) somit ein optimales Folgen jeder beliebigen Solltrajektorie, die durch das Exosystem (2.2a) generiert werden kann, ermöglicht. Allerdings fallen bei der Betrachtung von (2.83) auch zwei elementare Nachteile auf:

1. Die Länge  $T$  des Horizontes muss a priori *exakt* bekannt sein.
2. Die optimale Regelung ist *zeitvariant*.

Ersteres wird sich nicht für jede Anwendung sicherstellen lassen und motiviert, wie bereits in Abschnitt 2.2 diskutiert, das Konzept eines Agreeable Plan, der zunächst auch ohne Kenntnis von  $T$  implementiert werden kann.

Weiterhin wird es in den wenigstens Fällen gelingen, die Matrixdifferentialgleichungen (2.78) und (2.79) explizit zu lösen. Zur Implementierung wird daher die Hinterlegung numerisch bestimmter Zeitreihen der Rückführmatrix  $\mathbf{K}^*(t, T)$  und der Vorfiltermatrix  $\mathbf{F}^*(t, T)$  erforderlich. Aufgrund der Zeitvarianz des Regelgesetzes bedarf es einer entsprechenden Speicherkapazität. Soll diese reduziert werden, indem die Matrizen nur zu ausgewählten Zeitpunkten hinterlegt werden, wird dies jedoch für gewöhnlich eine Interpolation zur Laufzeit erfordern. Speicherkapazität und Rechenkapazität sind demnach gegeneinander abzuwägen.

Um den Speicherbedarf drastisch zu reduzieren, wird in [119] vorgeschlagen, vor der Implementierung die Anfangswerte  $\mathbf{P}_T(0)$  und  $\boldsymbol{\Pi}_T(0)$  durch Rückwärtslösung von (2.78) und (2.79) zu bestimmen, sodass dann die beiden Matrixdifferentialgleichungen zur Laufzeit vorwärts numerisch

gelöst werden können. Von einer solchen dynamischen Regelstrategie ist allerdings abzuraten, da die numerische Stabilität bei Vorwärtslösung von (2.78) und (2.79) nur schwer sichergestellt werden kann.

Zusammenfassend wäre es wünschenswert, statt des zeitvarianten Regelgesetzes (2.83) ein zeitinvariantes mit konstanten Matrizen  $\mathbf{K}^*$  und  $\mathbf{F}^*$  implementieren zu können.

## 2.4.2 Optimale Regelung mit vorgegebenem Endzustand

Die Ergebnisse zum folgenden optimalen Regelungsproblem mit vorgegebenem Endzustand werden in der Beweisführung in Kapitel 3 angewendet. Dort werden sie genutzt, um eine untere Schranke der zweiten Variation  $\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u})$  in (2.73) für eine gegebene Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  anzugeben.

**Optimales Regelungsproblem 2.1** (Vorgegebener Endwert). Für ein gegebenes  $T > 0$  sowie einen gegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  und Endwert  $\mathbf{x}_T$  finde eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  der Systemdynamik  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  auf dem Intervall  $[0, T]$ , die die Kosten

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.84)$$

mit  $\mathbf{Q}_x \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  minimiert sowie  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$  erfüllt.

Die Problemstellung wird unter zwei Annahmen<sup>12)</sup> betrachtet:

**Annahme 2.1.** Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist vollständig steuerbar.

**Annahme 2.2.** Es existiert ein  $\mathbf{Q}_{x,1/2}$ , sodass  $\mathbf{Q}_{x,1/2}^\top \mathbf{Q}_{x,1/2} = \mathbf{Q}_x$  gilt und das Paar  $(\mathbf{Q}_{x,1/2}, \mathbf{A})$  vollständig beobachtbar ist.

Es werden zwei Ziele verfolgt: Erstens soll nachgewiesen werden, dass eine optimale Lösung unter diesen Annahmen immer existiert. Zweitens, sollen die minimalen Kosten in einer Form angegeben werden, die die Abhängigkeit von Anfangs- und Endwert ersichtlich macht.

Damit diese Form der minimalen Kosten für die spätere Analyse geeignet ist, wird das Problem 2.1 jedoch zunächst mittels einer Zeittransformation in ein äquivalentes Problem überführt. Es wird  $\hat{t} := T - t$  und

<sup>12)</sup>Erläuterungen hierzu sind in Anhang B.1, S. 221, zu finden.

$\hat{\mathbf{x}}(\hat{t}) := \mathbf{x}(T - \hat{t})$  sowie  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{t}) := \mathbf{u}(T - \hat{t})$  für  $\hat{t} \in [0, T]$  definiert. Daraus folgt  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_T$  und  $\hat{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{x}_0$ . Die Transformation der Systemdynamik liefert

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}. \quad (2.85)$$

Durch die Annahmen 2.1 und 2.2 ist offensichtlich sichergestellt, dass  $(-\mathbf{A}, -\mathbf{B})$  vollständig steuerbar und  $(\mathbf{Q}_{1/2}, -\mathbf{A})$  vollständig beobachtbar ist. Nach der Substitutionsregel lauten die Kosten

$$\hat{J}_{0,T}(\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}_x \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{u}}^\top \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}) d\hat{t}. \quad (2.86)$$

Die Bestimmung einer Lösung  $(\hat{\mathbf{x}}_T^*(\cdot), \hat{\mathbf{u}}_T^*(\cdot))$  des äquivalenten Problems entspricht dem Lösen des Problems 2.1 „rückwärts“ in der Zeit. Daher liefert die Rücktransformation die Lösung

$$(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t)) = (\hat{\mathbf{x}}_T^*(T - t), \hat{\mathbf{u}}_T^*(T - t)). \quad (2.87)$$

Im Folgenden wird eine Lösung, die  $\hat{J}_{0,T}(\cdot)$  unter beliebigen gegebenen Randbedingungen  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_T$  und  $\hat{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{x}_0$  minimiert, angegeben und deren Existenz erörtert. In Anhang C.1 wird nachgewiesen, dass diese Lösung notwendige und hinreichende Optimalitätskriterien für beliebige  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_T$  erfüllt, sowie eine Herleitung der optimalen Kosten skizziert. Dies basiert im Wesentlichen auf [39, Abschnitt 5.3].

Die optimale Regelung lautet

$$\hat{\mathbf{u}}_T^*(\hat{t}) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \left( \hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}) \hat{\mathbf{x}}_T^*(\hat{t}) + \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})^\top \boldsymbol{\nu} \right) \quad (2.88)$$

mit  $\hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , der *Transitionsmatrix*<sup>13)</sup>  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T): [0, T] \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ . Darin ist  $\hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t})$  die Lösung der Riccatischen Matrixdifferentialgleichung

$$-\dot{\hat{\mathbf{P}}}_T = -\hat{\mathbf{P}}_T \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{P}}_T - \hat{\mathbf{P}}_T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{P}}_T + \mathbf{Q}_x \quad (2.89)$$

zum Endwert  $\hat{\mathbf{P}}_T(T) = \mathbf{0}$ . Wie bereits aus Abschnitt 2.4.1 bekannt ist, ist  $\hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t})$  symmetrisch, eindeutig und existiert für jedes  $T > 0$ . Nach Satz B.1 gilt  $\hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}) \succ \mathbf{0}$  für jedes  $\hat{t} \in [0, T)$  aufgrund von Annahme 2.2.

<sup>13)</sup> Anhang B.4, S. 223, gibt Eigenschaften von Transitionsmatrizen wie  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)$  an. Insbesondere ist  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)$  invertierbar für jedes  $\hat{t} \in [0, T]$  und es gilt  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)^{-1} = \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})$ .

Die Matrix  $\widehat{\Phi}(\hat{t}, T)$  ist die Transitionsmatrix des zeitvarianten mit  $\widehat{\mathbf{u}}_T^*(\hat{t})$  geschlossenen Regelkreises und erfüllt den Endwert  $\widehat{\Phi}(T, T) = \mathbf{I}$  sowie

$$\dot{\widehat{\Phi}}(\hat{t}, T) = \left( -\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \widehat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}) \right) \widehat{\Phi}(\hat{t}, T). \quad (2.90)$$

Aufgrund der Linearität existiert die Lösung der Dynamik (2.90) immer und ist eindeutig bestimmt. Der reelle Vektor  $\boldsymbol{\nu}$  ist festgelegt durch

$$\boldsymbol{\nu} = \widehat{\mathbf{W}}_s(T, 0)^{-1} (\widehat{\Phi}(T, 0) \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_0) \quad (2.91)$$

mit der durch  $\mathbf{R}^{-1}$  gewichteten Gramschen Steuerbarkeitsmatrix<sup>14)</sup>

$$\widehat{\mathbf{W}}_s(T, 0) = \int_0^T \widehat{\Phi}(T, \hat{t}) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \widehat{\Phi}(T, \hat{t})^\top d\hat{t} \quad (2.92)$$

zum zeitvarianten geschlossenen Regelkreis  $(-\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \widehat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}), -\mathbf{B})$ . Bekannterweise hat eine solche Zustandsrückführung keinen Einfluss auf die Steuerbarkeit. Daher folgt aus der vollständigen Steuerbarkeit von  $(-\mathbf{A}, -\mathbf{B})$ , dass auch der zeitvariante geschlossene Regelkreis für jedes  $T > 0$  auf dem Intervall  $[0, T]$  in jeden beliebigen Zustand überführt werden kann. Dies ist nach [150, Theorem 5 in Abschn. 3.5] genau dann der Fall, wenn  $\widehat{\mathbf{W}}_s(T, 0) \succ \mathbf{0}$ . Durch Annahme 2.1 ist daher  $\widehat{\mathbf{W}}_s(T, 0)$  invertierbar und  $\boldsymbol{\nu}$  ist für jedes  $T > 0$  mittels (2.91) berechenbar.

Zusammengefasst ist es unter den Annahmen 2.1 und 2.2 für jedes  $T > 0$  möglich, die optimale Regelung nach (2.88) zu ermitteln. Nach Anhang C.1 existiert zu dieser eine eindeutige Lösung  $\widehat{\mathbf{x}}_T^*(\hat{t})$  des zeitvarianten geschlossenen Regelkreises, die die beiden Randbedingungen erfüllt. Aus den vorangegangenen Herleitungen folgt unmittelbar der Satz:

**Satz 2.2** (Optimale Regelung mit vorgegebenem Endwert). *Die Annahmen 2.1 und 2.2 seien erfüllt. Es seien  $\widehat{\mathbf{P}}_T(T - t)$ ,  $\widehat{\Phi}(T - t, T)$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  und  $\widehat{\mathbf{W}}_s(T, 0)$  wie zuvor bestimmt. Für jedes gegebene  $T > 0$  und jeden gegebenen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  sowie Endwert  $\mathbf{x}_T$  existiert die optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t))$  des Problems 2.1 mit  $\mathbf{u}_T^*(t)$  gegeben in (2.88). Mit  $\widehat{\mathbf{P}}_T(0) \succ \mathbf{0}$  berechnen sich die minimalen Kosten  $J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T) := J_T(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  durch*

$$J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_T \widehat{\mathbf{P}}_T(0) \mathbf{x}_T + (\mathbf{x}_T - \widehat{\Phi}(T, 0) \mathbf{x}_0)^\top \widehat{\mathbf{W}}_s(T, 0)^{-1} (\mathbf{x}_T - \widehat{\Phi}(T, 0) \mathbf{x}_0) \right). \quad (2.93)$$

<sup>14)</sup> Siehe hierzu z. B. [84, Abschnitt 3.8].



Die Darstellung (2.93) der minimalen Kosten bietet einen Vorteil gegenüber der Standarddarstellung in [39, Abschnitt 5.3 (Problem 1)], die auch in [22] verwendet wird. Aus Gl. (2.93) ist direkt ersichtlich, dass

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \geq \frac{1}{2} \mathbf{x}_T^T \hat{\mathbf{P}}(0) \mathbf{x}_T > 0 \quad (2.94)$$

für jedes  $\mathbf{x}_T \neq \mathbf{0}$  und  $T > 0$  gilt. Für die Standarddarstellung in [39] ist hingegen der gleiche Schluss nicht offensichtlich, da in dieser  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_T$  vertauschte Rollen bei selber Beschaffenheit der Matrizen annehmen.

## 2.5 Optimalitätsbedingungen über unendliche Horizonte

In den folgenden beiden Abschnitten werden zum einen notwendige Optimalitätsbedingungen für eine Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  über einen unendlichen Horizont ermittelt und zum anderen bekannte hinreichende Optimalitätsbedingungen diskutiert.

### 2.5.1 Notwendige Optimalitätsbedingungen

Es wird zunächst die allgemeinere Problemstellung aus Abschnitt 2.3.1, S. 30, unter der zusätzlichen Berücksichtigung einer Stellgrößenbegrenzung  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ :  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$  betrachtet. Angenommen  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ist eine optimale zulässige Lösung, die eines der in Definition 2.3 vorgestellten Optimalitätskriterien über einen unendlichen Horizont, d. h. für  $T \rightarrow \infty$ , erfüllt. Dann werden von dieser die folgenden Bedingungen nach [76] eingehalten: Es existiert ein  $\mu \geq 0$  und ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Kozustand  $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ , sodass Folgendes gilt:

$$0 \neq \|\begin{bmatrix} \mu & \phi(0)^T \end{bmatrix}\|_2, \quad (2.95a)$$

$$\dot{\phi} = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, \mu, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_*, \quad (2.95b)$$

$$\mathbf{u}^*(t) = \arg \min_{\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}} H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \phi(t), \mu, t) \quad (2.95c)$$

für alle  $t \in [0, \infty)$  mit der modifizierten Hamilton-Funktion

$$H(\cdot) = \mu L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \phi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.96)$$

Der entscheidende Unterschied zu den bisher in Abschnitt 2.3 diskutierten Bedingungen ist das Entfallen der Transversalitätsbedingung

$\phi_T(T) = \mathbf{0}$  in (2.52c). D.h., der Kozustand  $\phi(\cdot)$  wird durch seine Dynamik (2.95b) und einen prinzipiell frei wählbaren Anfangswert  $\phi(0)$ , der lediglich der neuen Bedingung (2.95a) genügen muss, festgelegt. Die reelle Zahl  $\mu$  wird benötigt, um zwei unterschiedliche Fälle zu unterscheiden. Diese sind das *normale* Problem  $\mu > 0$  und das *abnormale* Problem  $\mu = 0$ . Die Bezeichnung des abnormalen Problems rührt daher, dass für dieses die notwendigen Bedingungen (2.95) völlig unabhängig vom Gütefunktional (2.33) sind.<sup>15)</sup> Ein abnormales Problem kann beispielsweise für das optimale Regelungsproblem 2.1 vorliegen, wenn ein vorgegebener Endwert auf einem endlichen Horizont unter einer Stellgrößenbegrenzung erreicht werden muss. Dass die Wahl  $\mu = 0$  auch über einen unendlichen Horizont notwendig sein kann, zeigt ein Beispiel in [76]. Für den Fall  $\mu = 0$  verhindert dann (2.95a) die triviale Wahl  $\phi(0) = \mathbf{0}$ , wodurch sonst  $\phi(t) \equiv \mathbf{0}$  aufgrund der in  $\phi(t)$  linearen Dynamik (2.95b) und auch  $H(\cdot) \equiv 0$  gelten würde und somit (2.95c) keine sinnvolle Information zu  $\mathbf{u}^*(t)$  enthielte. Liegt hingegen ein normales Problem vor, dann ist es ohne Weiteres möglich,  $\mu = 1$  zu setzen.<sup>16)</sup>

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die allgemeinen notwendigen Optimalitätsbedingungen (2.95) aus [76] für das vorliegende linear-quadratische optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  zu konkretisieren. Es wird nachgewiesen, dass die Bedingungen auch für den unbeschränkten Stellgrößenvektor  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  gültig sind und es sich immer um ein normales Problem  $\mu = 1$  handelt.

Tatsächlich können die Bedingungen (2.95) nicht direkt auf eine Problemstellung ohne Stellbegrenzungen übertragen werden, wie aus [83] hervorgeht. Infolgedessen werden die Bedingungen für das Problem  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  mit unbeschränkten Stellgrößen hergeleitet, wobei analog zu [76] vorgegangen wird. In [76] erfolgte die Herleitung aus den notwendigen Bedingungen für endliche Optimalität, da alle Optimalitätskriterien aus Definition 2.3 endliche Optimalität implizieren (vergleiche Abbildung 2.2). Von einer endlich optimalen Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  wird nach Definition 2.3 verlangt, dass sie für jedes beliebige  $T > 0$  eine optimale Lösung des folgenden Problems ist.

<sup>15)</sup> Der Integrand  $L(\cdot)$  entfällt in (2.95), da  $H(\cdot) = \phi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  für  $\mu = 0$ .

<sup>16)</sup> Jede andere Wahl  $\mu > 0$  impliziert nur eine Skalierung des Gütefunktionals:  $\mu J_{0,T}(\cdot)$ , was aber bekannterweise keinen Einfluss auf eine optimale Lösung hat.

**Optimales Regelungsproblem 2.2.** Für gegebene Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ , finde eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$ , die das Gütefunktional (2.3) über einen endlichen Horizont  $[0, T]$  unter der Endwertbedingung  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*(T)$  minimiert.

Aus den gleichen Überlegungen wie zum Optimalitätsprinzip, S. 19, folgt, dass eine optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  des Problems 2.2 über den Horizont  $[0, T_2]$  mit  $T_2 > 0$  auch eine optimale Lösung des Problems 2.2 über jeden Horizont  $[0, T_1]$  mit  $0 < T_1 \leq T_2$  ist. Um notwendige Kriterien für endliche Optimalität zu finden, genügt es folglich, notwendige Optimalitätsbedingungen für das Problem 2.2 über einen beliebig langen Horizont zu ermitteln. In [76] wurden daher die bekannten notwendigen Bedingungen für ein Problem<sup>17)</sup> wie 2.2 aufgestellt und im Anschluss der Übergang  $T \rightarrow \infty$  vollzogen, woraus letztendlich die Bedingungen (2.95) resultierten. Durch ein analoges Vorgehen unter Einbeziehung der Linearität des Systems (2.1), der quadratischen Gestalt der Kosten (2.3) und des Wegfallens der Stellgrößenbegrenzung ist es möglich folgenden Satz herzuleiten:

**Satz 2.3** (Notwendige Optimalitätsbedingungen). *Es sei  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  eine zulässige Lösung auf dem Intervall  $[0, \infty)$ , die eines der Optimalitätskriterien aus Definition 2.3 bezüglich des linear-quadratischen optimalen Folgeregelungsproblems OFP<sub>∞</sub> 2.1 erfüllt. Dann existiert ein Anfangswert  $\phi(0) \in \mathbb{R}^n$  des Kozustandes, sodass die Bedingungen<sup>18)</sup>*

$$\dot{\phi} = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \quad (2.97a)$$

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \quad (2.97b)$$

mit der Hamilton-Funktion gemäß (2.60)

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t) = \frac{1}{2}((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) + \phi^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{E}_a \bar{\mathbf{x}}) \quad (2.98)$$

für jedes  $t \in [0, \infty)$  erfüllt sind.

*Beweis.* Der Beweis ist in Anhang C.2, S. 229, zu finden. □

<sup>17)</sup>Für die allgemeinere Problemstellung aus Abschnitt 2.3.1, S. 30, und unter Berücksichtigung einer Stellgrößenbegrenzung  $\mathcal{U}$ .

<sup>18)</sup>Hier wird die Notation für eine Funktion:  $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \cdot)|_* = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \cdot)$  verwendet.

Da für das Problem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  gemäß (2.68) wegen  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  die verschärfte Legendre-Clebsch Bedingung  $\partial^2 H(\cdot)/\partial \mathbf{u}^2 \succ \mathbf{0}$  gilt, ist (2.97b) äquivalent zu

$$\mathbf{u}^*(t) = \arg \min_{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m} H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \phi(t), t). \quad (2.99)$$

Zusammengefasst wurde durch Satz 2.3 bewiesen, dass die Bedingungen (2.95) aus [76] für die spezielle Wahl  $\mu = 1$  und die Erweiterung auf  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$  notwendige Optimalitätsbedingungen für das linear-quadratische Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  sind.

Der Vergleich des Ergebnisses von Satz 2.3 mit denen in Abschnitt 2.3.2 aufgestellten notwendigen Bedingungen für das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_T 2.1$  über einen endlichen Horizont  $T > 0$  offenbart nur einen Unterschied. Über den unendlichen Horizont existiert kein Pendant zur Transversalitätsbedingung  $\phi_T(T) = \mathbf{0}$  in (2.66b). Stattdessen ist die Wahl des Anfangswertes  $\phi(0)$  völlig frei. In Abschnitt 2.4.1 war ein Kandidat  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  für das Problem  $\text{OFP}_T 2.1$  bereits durch die notwendigen Bedingungen und daher durch die Lösung des Hamiltonschen Systems (2.65) für die Randbedingungen (2.66) eindeutig bestimmt. Im Gegensatz dazu kann mithilfe der Bedingungen aus Satz 2.3 kein eindeutiger Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  gefunden werden. Es stellt sich die Frage, wie der Anfangswert  $\phi(0)$  zu wählen ist. Diese wird in Kapitel 3 beantwortet.

## 2.5.2 Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Bevor hinreichende Optimalitätsbedingungen diskutiert werden, wird auf Basis der notwendigen Bedingungen aus Satz 2.3 und der Variationsrechnung 2.3.1 eine Analyse der Kosten  $J_T(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot))$  durchgeführt.

Für einen Kandidaten  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  einer optimalen Lösung des linear-quadratischen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 2.1$  seien die Bedingungen in Satz 2.3 erfüllt. Dann liegt ein Kozustand  $\phi(t)$  auf  $[0, \infty)$  vor und die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung (2.52a) sowie (2.52b) sind für jedes  $t \in [0, \infty)$  erfüllt. Im Folgenden werden Variationen  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$ , wie in Abschnitt 2.3.2 eingeführt, verwendet. Eine zulässige Lösung kann daher immer durch  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \epsilon \delta \mathbf{x}$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \epsilon \delta \mathbf{u}$  für ein beliebiges  $\epsilon \in \mathbb{R}$  und eine entsprechende Variation ausgedrückt werden. Für die erste Variation der Kosten  $J_T(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot))$  in (2.48) folgt daher wegen  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$

$$\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = -\phi(T)^\top \delta \mathbf{x}(T). \quad (2.100)$$

Wie bereits im vorherigen Abschnitt festgestellt wurde, fehlt ein Pendant zur Transversalitätsbedingung  $\phi_T(T) = \mathbf{0}$  aus (2.52c), die für das Pro-

blem OFP<sub>T</sub>2.1 über einen endlichen Horizont notwendig ist. Mit Blick auf die Kozustandsdynamik (2.97a) ist davon auszugehen, dass im Allgemeinen  $\lim_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \neq 0$  gilt, wie bereits in Abschnitt 2.3.1 diskutiert wurde. Als Resultat entfällt die erste Variation  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  nicht asymptotisch für  $T \rightarrow \infty$ . Dies ist ein signifikanter Unterschied zu einem Kandidaten  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  einer Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>2.1, für den  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = 0$  nach Abschnitt 2.4.1 vorliegt. Für die Differenz der Kosten zu einer beliebigen zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  auf  $[0, \infty)$  erhält man für die Wahl  $\epsilon = 1$  o. B. d. A., siehe hierzu die Erläuterung auf S. 38,

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) = -\phi(T)^\top \delta \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)), \quad (2.101)$$

wobei die zweite Variation durch (2.73) in Abschnitt 2.3.2 gegeben ist. Eine Prüfung des Vorzeichens der zweiten Variation ist hier im Unterschied zu Abschnitt 2.4.1 offensichtlich nicht hinreichend, um eines der Optimalitätskriterien aus Definition 2.3 für  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  nachzuweisen. D. h., dass die in Abschnitt 2.3.2 eingeführten hinreichenden Bedingungen nicht auf den unendlichen Horizont zu übertragen sind.

Im Anschluss werden verschiedene hinreichende Kriterien und Methoden zum Finden einer optimalen Lösung diskutiert. Anhand dessen wird aufgezeigt, dass keine einfach anzuwendende Vorgehensweise existiert, die für die Problemstellung OFP<sub>∞</sub>2.1 geeignet ist. Dies motiviert die individuelle Beweisführung in Kapitel 3.

### Transversalitätsbedingungen über unendliche Horizonte

In der Regel werden alternative Transversalitätsbedingungen zu (2.52c) von hinreichenden Bedingungen über unendliche Horizonte zum Nachweis der Optimalität eines Kandidaten, der die notwendigen Bedingungen erfüllt, vorausgesetzt. Eine auf Basis von (2.101) naheliegende, leicht zu prüfende und in [43, Abschnitt 2.4] oder [44] angegebene Bedingung ist

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \phi(T) = \mathbf{0}. \quad (2.102)$$

Wird darüber hinaus wie in [43] oder [44] angenommen, dass jede zulässige Trajektorie  $\mathbf{x}(\cdot)$  und damit auch jede Variation  $\delta \mathbf{x}(\cdot)$  auf  $[0, \infty)$  beschränkt ist, dann folgt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \phi(T)^\top \delta \mathbf{x}(T) = 0. \quad (2.103)$$

Aus (2.101) ist ersichtlich, dass eine Überprüfung eines der Kriterien aus Definition 2.3 nun wieder auf einfache Weise anhand der zweiten Variation

möglich ist. Gilt (2.102) für ein allgemeines, normales Problem, wie zu Beginn von Abschnitt 2.5.1 behandelt mit zusätzlicher Einschränkung  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ , dann ist die Konvexität der Hamilton-Funktion  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t)$  aus (2.60) bezüglich der Variablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  hinreichend für aufholende Optimalität [43].

Unter dieser Bedingung an die Hamilton-Funktion ist eine allgemeinere und wohlbekannte hinreichende Transversalitätsbedingung für aufholende Optimalität durch

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \phi(T) \delta \mathbf{x}(T) \geq 0 \quad (2.104)$$

für jede zulässige Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  gegeben. Analog ist es für eine schwach überholend optimale Lösung hinreichend, falls zu jeder zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  ein  $\hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in [0, \infty)$  existiert, sodass

$$\phi(T) \delta \mathbf{x}(T) \geq 0 \quad (2.105)$$

für alle  $T \geq \hat{T}$  erfüllt ist. Es ist zu erkennen, dass sich diese Transversalitätsbedingungen an den jeweiligen Optimalitätsdefinitionen 2.3 orientieren. Diese Transversalitätsbedingungen sind in [43, 146, 147] zu finden. Ihre Herleitung lässt sich mithilfe des Beweises von [74, Theorem 3.29] nachvollziehen.

Während (2.102) noch einfach zu überprüfen ist, müssen für (2.104) und (2.105) alle zulässigen Lösungen  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  in Betracht gezogen werden. Dies wird in der Regel nur sehr schwer durchzuführen sein. Nichtsdestotrotz können diese Transversalitätsbedingungen für spezielle Problemstellung wie optimale ökonomische Wachstumsprobleme geeignet sein [43]. Im Falle des linear-quadratischen optimalen Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{\infty} 2.1$  wird im Allgemeinen jedoch kein Kandidat, der mittels der notwendigen Bedingungen in Satz 2.3 bestimmt wurde, eine dieser Transversalitätsbedingungen erfüllen. Daher sind diese hier nicht als hinreichende Bedingungen geeignet.

## Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Es soll das Gütefunktional

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (2.106)$$

unter Einbezug der Systemdynamik  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  minimiert werden. Die Gleichung

$$-\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t)} \left( L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right) \quad (2.107)$$

heißt Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung. Ist das Gütefunktional hinreichend glatt, dann ist die Existenz einer Lösung  $V(t, \mathbf{x}(t))$  der HJB Gleichung zum Endwert  $V(T, \mathbf{x}(T)) = 0$  eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems. Genauer gesagt gilt:

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) = V(0, \mathbf{x}_0) \quad (2.108)$$

und die optimale Regelung  $\mathbf{u}_T^*(t)$  ist das Argument des Optimierungsproblems in der HJB Gleichung. Dieses bekannte Ergebnis wird z. B. in [6] und [39] hergeleitet.

Es stellt sich die Frage, ob dieses Ergebnis auch auf den unendlichen Horizont  $T \rightarrow \infty$  erweitert werden kann. Hierzu kann man feststellen, dass im Allgemeinen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_{t,T}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(\cdot)) = \infty \quad (2.109)$$

für jedes  $t \in [0, \infty)$  eintritt. Ein direkter Zusammenhang zu einer Lösung  $V(t, \mathbf{x}(t))$  der HJB Gleichung wie zuvor ist demnach nicht zu erwarten.

Trotz alledem gibt es Ansätze in der Literatur, wie in [41, 152], die auf der HJB Gleichung basieren. Existiert zu dieser eine Lösung  $V(t, \mathbf{x}(t))$ , die bestimmte Eigenschaften aufweist, so kann mithilfe dieser eine hinreichende Optimalitätsbedingung [41, Theorem 3.4] formuliert werden oder ggf. auch direkt eine schwach überholend optimale Regelung gefunden werden [152, Theorem III.5].

Jedoch ist man dann damit konfrontiert, ein solches  $V(t, \mathbf{x}(t))$ , falls dieses überhaupt existiert, zu finden. Eine Lösung der HJB Gleichungen mit einer vorgegeben Randbedingung zu bestimmen, ist im Allgemeinen bereits sehr komplex. Wohingegen im Falle des endlichen Horizontes die Randbedingung  $V(T, \mathbf{x}(T)) = 0$  zu erfüllen war, liegt nun entweder gar keine Randbedingung vor, wie in [152], oder diese ist nicht eindeutig festgelegt, wie in [41]. Sind einmal Kandidaten für das gewünschte  $V(t, \mathbf{x}(t))$  gefunden, stellt sich die Schwierigkeit, die geforderten Eigenschaften in [41, 152] nachzuweisen. Wie bei den Transversalitätsbedingungen kann es

hierfür erforderlich sein, bestimmte Eigenschaften für beliebige zulässige Lösungen zu überprüfen.

In Hinsicht auf das Problem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  erscheint es wegen den genannten Schwierigkeiten wenig vielversprechend, mithilfe dieser Methoden die Optimalität eines Kandidaten  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  zu zeigen oder eine optimale Lösung direkt zu bestimmen. Diese Ansätze werden daher nicht vertieft.

### Weitere Ansätze

Ein weiterer Ansatz zur Formulierung hinreichender Bedingungen basiert auf sogenannten  $G$ -unterstützten Trajektorien. Die Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  einer zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  heißt  $G$ -unterstützt, falls eine Funktion  $G(\mathbf{x}(t))$  existiert, für die eine spezielle Ungleichungsbedingung erfüllt wird, für Details siehe [43, Kapitel 6]. Ist nun  $\mathbf{x}^*(t)$   $G$ -unterstützt und werden darüber hinaus verschiedene weitere Annahmen erfüllt, dann kann dies hinreichend sein für aufholende Optimalität von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ , siehe z.B. [43, Theorem 6.3]. Wie diese Voraussetzungen überprüft werden können, ist jedoch nicht offensichtlich. Dies erfordert nämlich das Bestimmen von Hilfsfunktionen, wie beispielsweise  $G(\cdot)$ , für die nur schwer nachweisbare Eigenschaften erfüllt sein müssen, siehe z.B. [152, Theorem III.6]. Außerdem wird in der Regel verlangt, dass unter anderem  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  gilt, wobei  $\mathcal{X}$  kompakt ist. Im Gegensatz zu [41, 152] ist dies hier nicht gegeben. Aus den genannten Gründen werden Ansätze basierend auf  $G$ -unterstützten Trajektorien nicht in Betracht gezogen.

Ein weiteres mögliches Vorgehen wäre die in [74, Abschnitt 3.3.6] vorgestellte „direkte Methode der Optimierung“. Diese umfasst als ersten Schritt den Nachweis der Existenz einer zulässigen Lösung, die eines der Optimalitätskonzepte nach Definition 2.3 erfüllt. Gelingt dieser Nachweis, so folgt darauf die Bestimmung desjenigen Kandidaten  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  aus den notwendigen Bedingungen aus Abschnitt 2.5.1, für den die Bedingungen des betreffenden Optimalitätskriteriums in Definition 2.3 unter Betrachtung aller verschiedenen möglichen Kandidaten erfüllt werden. Durch den Nachweis der Existenz entfällt somit die Notwendigkeit, diese Bedingungen für jede zulässige Lösung zu prüfen. Ideal wäre es, wenn ohnehin nur ein einziger möglicher Kandidat vorläge, sodass der zweite Schritt gänzlich entfallen könnte. Das ist allerdings nicht erfüllt, da die notwendigen Bedingungen keinen eindeutigen Kandidaten liefern, wie in Abschnitt 2.5.1 diskutiert wurde. Daher liegt hier bereits ein Nachteil dieser direkten Methode vor.



Während es für diese direkte Methode zwar möglich erscheint, dass hinreichende Bedingungen nicht mehr angegeben und überprüft werden müssen, so muss man sich nun mit der Existenztheorie über unendliche Horizonte auseinandersetzen, was ebenfalls nicht trivial ist. Für das hier vorliegende nicht autonome<sup>19)</sup> Problem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  führt dies oft auf die Turnpike-Theorie zurück, siehe z. B. [171, 173, 174]. Wie schon in Abschnitt 2.2.2 bemerkt, sind mit dieser zahlreiche Annahmen verbunden, die auch nicht immer alle für das Problem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  erfüllt werden. Dies verhindert im Allgemeinen die Anwendung der Ergebnisse zur Existenz aus [173, Kapitel 2] oder [174] bzw. [171, Kapitel 7]. Wie in [74] bleibt es hier bei dem Hinweis zu diesem Vorgehen und es wird nicht näher erörtert, ob geeignete Existenztheoreme existieren, die eine einfache Anwendung dieses Vorgehens auf das Problem  $\text{OFP}_\infty 2.1$  allgemein ermöglichen würden.

## 2.6 Linear-quadratischer Regler über endliche und unendliche Horizonte

Zum Abschluss dieses Kapitels wird die folgende klassische Problemstellung über unendliche Horizonte betrachtet:

**Optimales Regelungsproblem 2.3** (Linear-quadratischer Regler). Für einen gegebene Anfangswert  $\mathbf{x}_0$ , finde eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  der Systemdynamik  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ , die das Gütefunktional

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.110)$$

mit  $\mathbf{Q}_x \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  für  $T \rightarrow \infty$  *minimiert*.

Die folgenden bekannten Ergebnisse können beispielsweise [6] entnommen werden. Es werden typische Annahmen zur Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit<sup>20)</sup> getroffen:

**Annahme 2.3.** Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist stabilisierbar.

**Annahme 2.4.** Es existiert ein  $\mathbf{Q}_{x,1/2}$  gegeben durch  $\mathbf{Q}_{x,1/2}^\top \mathbf{Q}_{x,1/2} = \mathbf{Q}_x$ , sodass das Paar  $(\mathbf{Q}_{x,1/2}, \mathbf{A})$  entdeckbar ist.

<sup>19)</sup> Dies bezieht sich auf die Abhängigkeit des Integranden der Kosten (2.3) von der Zeit durch  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  unter der Annahme, dass nicht jede Komponente von  $\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t)$  konstant ist.

<sup>20)</sup> Siehe hierzu Anhang B.1.

Da ein unendlicher Horizont vorliegt, ist die Erfüllung der Bedingungen aus Satz 2.3 notwendig. Wie in Abschnitt 2.5.1 diskutiert, gehen diese aus den notwendigen Bedingungen (2.52) über einen endlichen Horizont durch Entfallen der Transversalitätsbedingung (2.52c) hervor. Außerdem ist festzustellen, dass das Problem 2.3 aus dem optimalen Folgeregelungsproblem OFP<sub>T</sub>2.1 für  $T \rightarrow \infty$  resultiert, falls man  $\bar{x}(t) \equiv \mathbf{0}$  wählt und  $\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$  durch  $\mathbf{Q}_x$  ersetzt. Aus beidem folgt, dass man die notwendigen Bedingungen für das Problem 2.3 einfach aus den Bedingungen (2.62) und (2.65), die in Abschnitt 2.3.2 für das Problem OFP<sub>T</sub>2.1 hergeleitet wurden, gewinnen kann.

Daher ist jeder mögliche Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), -\mathbf{R}\mathbf{B}^T\phi(\cdot))$  durch die Lösung des Hamiltonschen Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^* \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q}_x & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

bestimmt, wobei ein Anfangswert  $\phi(0)$  gewählt werden muss. Um einen geeigneten Anfangswert zu finden, wird eine Transformation durchgeführt:

$$\phi(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}^*(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (2.112)$$

wobei  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die positiv semidefinite und symmetrische Lösung der algebraischen Riccatigleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}_x = \mathbf{0} \quad (2.113)$$

ist. Dass eine solche Lösung  $\mathbf{P} \succeq \mathbf{0}$  von (2.113) existiert und auch unter den getroffenen Annahmen eindeutig ist, geht z. B. aus [110] hervor. Wendet man die Transformation (2.112) auf das Hamiltonsche System (2.111) unter Verwendung der Riccatigleichung (2.113) an, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^* \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

Wie aus [6, Abschn. 3.2] bekannt ist, ist die Matrix  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$  unter den getroffenen Annahmen eine Hurwitzmatrix. Daraus folgt sofort, dass das autonome Teilsystem bezüglich  $\boldsymbol{\xi}(t)$ , in der zweiten Zeile von (2.114), instabil ist und jede Wahl  $\boldsymbol{\xi}(0) \neq \mathbf{0}$  zu einer unbeschränkten Lösung  $\boldsymbol{\xi}(t)$  führen würde. Bestenfalls wären die Kosten  $J_{0,T}(\cdot)$  davon unbeeinflusst, was  $\mathbf{B}^T\boldsymbol{\xi}(t) \equiv \mathbf{0}$  erfordern würde und auf die selbe Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  wie für  $\boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{0}$  führen würde. Andernfalls wären die Kosten unbeschränkt

für  $T \rightarrow \infty$ . Nach dieser Überlegung kann o.B.d.A.  $\xi(0) = \mathbf{0}$  gewählt werden, woraus dann  $\xi(t) \equiv \mathbf{0}$  und somit  $\phi(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}^*(t)$  resultiert.

Auf Basis dieser Wahl erhält man aus der Bedingung (2.62) den linear-quadratischen Regler

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}\mathbf{x}^*(t), \quad (2.115)$$

der auch nachweislich eine eindeutige optimale Regelung ist [6]. Weiterhin liefert (2.114) den geschlossenen Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})\mathbf{x}^*, \quad (2.116)$$

der asymptotisch stabil ist, wie aus der obigen Diskussion hervorgeht. Die endlichen minimalen Kosten können zu

$$J^*(\mathbf{x}_0) := \lim_{T \rightarrow \infty} J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_0^\top \mathbf{P}\mathbf{x}_0 \quad (2.117)$$

berechnet werden.

Für die Herleitungen in Kapitel 3 ist auch der Zusammenhang zur Lösung des analogen Problems über einen endlichen Horizont relevant:

**Optimales Regelungsproblem 2.4.** Löse das optimale Regelungsproblem 2.3 für ein gegebenes  $T > 0$ .

Das Problem 2.4 ist äquivalent zum Problem OFP<sub>T</sub>2.1, wenn man  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}$  durch  $\mathbf{Q}_x$  und  $\bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$  ersetzt. Entsprechend kann die gesuchte Lösung direkt aus den Ergebnissen in Abschnitt 2.4.1 abgeleitet werden. Die optimale Regelung ist demnach

$$\mathbf{u}_T^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}_T(t)\mathbf{x}_T^*(t) \quad (2.118)$$

mit der eindeutigen positiv semidefiniten und symmetrischen Lösung  $\mathbf{P}_T(t)$  der Riccatischen Matrixdifferentialgleichung

$$-\dot{\mathbf{P}}_T = \mathbf{P}_T \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}_T + \mathbf{Q}_x \quad (2.119)$$

zum Endwert  $\mathbf{P}_T(T) = \mathbf{0}$ . Die optimalen Kosten sind gegeben durch  $J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_0^\top \mathbf{P}_T(0)\mathbf{x}_0$ .

Der durch das folgende Lemma gegebene Zusammenhang wird in Kapitel 3 wichtig.

**Lemma 2.1** (siehe [40]). *Es seien die Annahmen 2.3 und 2.4 erfüllt. Die eindeutige positiv semidefinite und symmetrische Lösung der algebraischen Riccatigleichung (2.113) sei  $\mathbf{P}$ . Für ein beliebiges  $T > 0$  sei  $\mathbf{P}_T(t)$  die Lösung der Riccatischen Matrixdifferenzialgleichung (2.119) auf dem Intervall  $[0, T]$  zum Endwert  $\mathbf{P}_T(T) = \mathbf{0}$ . Außerdem seien Konstanten  $\alpha > 0$  und  $M_{cl} > 0$  gegeben, sodass*

$$\|e^{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})t}\|_2 \leq M_{cl}e^{-\alpha t} \quad (2.120)$$

*für alle  $t \geq 0$  erfüllt ist.<sup>21)</sup> Dann existiert ein  $\widetilde{M}_P > 0$ , sodass*

$$\|\mathbf{P}_T(t) - \mathbf{P}\|_2 \leq \widetilde{M}_P e^{-2\alpha(T-t)} \quad (2.121)$$

*für jedes  $T > 0$  und jedes  $t \in [0, T]$  gilt.*

Eine genaue Bestimmung der Konstanten  $\widetilde{M}_P$  ist in [40] zu finden. Aus Lemma 2.1 folgt für jedes gegebene  $t \geq 0$ , dass  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_T(t) = \mathbf{P}$  vorliegt. Dies führt auf das bekannte Resultat, dass die optimalen Kosten des Problems 2.4 für immer längere Horizonte gegen die des Problems 2.3 konvergieren, d. h., dass  $\lim_{T \rightarrow \infty} J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0) = J^*(\mathbf{x}_0)$  gilt.

Auf Basis dieser Konvergenz wird in [6, Abschnitt 3.1] nachgewiesen, dass die hergeleitete Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  die Kosten des Problems 2.3 minimiert. Hier wird noch untersucht, welches Optimalitätskriterium aus Definition 2.3 aus dieser Konvergenz abgeleitet werden kann. Hierzu sei daran erinnert, dass  $J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0) \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  und jedes  $T > 0$  gilt. Außerdem resultiert aus der Konvergenz, dass für jedes beliebige  $\epsilon > 0$  ein  $\widehat{T} > 0$  existiert, sodass

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) - \epsilon \leq J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0) \quad (2.122)$$

für alle  $T \geq \widehat{T}$  erfüllt wird. Führt man beides zusammen, so erhält man unmittelbar, dass zu jeder zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  und zu jedem beliebigen  $\epsilon > 0$  ein  $\widehat{T} > 0$  existiert, sodass

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) - \epsilon \leq J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) \quad (2.123)$$

für alle  $T \geq \widehat{T}$  erfüllt ist. Damit wurde belegt, dass  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  eine aufholend optimale Lösung ist.

---

<sup>21)</sup> Dies ist immer zu erfüllen, falls man  $\alpha$  so wählt, dass  $\Re\{\lambda\} < -\alpha$  für jeden Eigenwert  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})$  gilt.

Konvergieren die optimalen Kosten des Problems über  $[0, T]$  für immer längere Horizonte gegen die Kosten eines Kandidaten für das Problem über einen unendlichen Horizont, so lässt sich demnach aufholende Optimalität für diesen Kandidaten nachweisen. Tatsächlich muss dies aber nicht das stärkste Optimalitätskriterium sein, dass durch diesen Kandidaten erfüllt wird. Im Falle des linear-quadratischen Reglers ist es mittels der Methode der *quadratischen Ergänzung* (siehe [155, Abschnitt 10.2]) oder der in Abschnitt 2.3.2 vorgestellten Variationsrechnung möglich, starke Optimalität und, aufgrund der Eindeutigkeit der optimalen Lösung, auch überholende Optimalität zu beweisen.

## 3 Explizite linear-quadratische optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte

In diesem Kapitel wird aufgezeigt, dass eine linear-quadratische optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte ein einheitlicher Ansatz für die Regelung von quadratischen, über- und unteraktuierten Systemen ist. Der Schwerpunkt des Kapitels liegt auf der Herleitung von einfachen Entwurfs-gleichungen und der sorgfältigen quantitativen Analyse der Eigenschaften der so entworfenen Folgeregelung. Die Ergebnisse gehen in weiten Teilen auf die Veröffentlichungen [20–22, 25] und deren Präsentation [24] zurück.

### 3.1 Problemstellung und Annahmen

Es sei das lineare und zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (3.1b)$$

gegeben, wobei der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  mit dem Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , die Stellgröße  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  und der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  zum Zeitpunkt  $t \in [0, \infty)$  definiert sind. Die Störungen  $\mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}}$  sowie die Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  werden durch das Exosystem

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} \quad (3.2a)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \quad (3.2b)$$

mit dem zugehörigen Zustandsvektor  $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  und dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$  generiert. Um sowohl der Erzeugung der Störgrößen als auch der Solltrajektorien gerecht zu werden, wird das Exosystem meist in block-diagonaler Form vorliegen.

Im Zentrum dieses Kapitels steht die Lösung des folgenden Problems, das das Problem OFP<sub>∞</sub>2.1 aus Abschnitt 2.1 präzisiert:

**Optimales Folgeregelungsproblem: OFP<sub>∞</sub>3.1** (Unendlicher Horizont). Für *gegebene* Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  des Systems (3.1) und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  des Exosystems (3.2), finde eine *zulässige* Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  der Systemdynamik (3.1) auf dem Intervall  $[0, \infty)$ , die *überholend optimal* ist bezüglich der Kosten

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.3)$$

mit den symmetrischen Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ .

Im Allgemeinen werden für jede beliebige zulässige Lösung<sup>1)</sup> die Kosten  $J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot))$  für  $T \rightarrow \infty$  unbeschränkt sein. Die Ursache hierfür ist, dass ein System (2.1) im Allgemeinen fortlaufend Stellenergie benötigt, damit der Ausgang  $\mathbf{y}$  einer Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  folgt. Daher können der Folgefehler  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$  und die Stellgröße  $\mathbf{u}$  nicht gleichzeitig gegen null konvergieren. Aus diesem Grund besitzen die Kosten über einen unendlichen Horizont üblicherweise kein Minimum und die herkömmliche Forderung nach einer Minimierung der Kosten ist nicht mehr zielführend. Stattdessen wird daher eine überholend optimale Lösung gesucht. Dabei stellt die überholende Optimalität nach Definition 2.3(ii), S. 17, das stärkste Optimalitätskriterium dar, das für unbeschränkte Kosten in der Literatur zu finden ist, vgl. auch [11, 42, 151]. Eine allgemeine Diskussion und weitere Details sind in Abschnitt 2.1 und 2.2 zu finden.

In diesem Kapitel werden die folgenden Annahmen<sup>2)</sup> vorausgesetzt:

**Annahme 3.1.** Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist stabilisierbar.

**Annahme 3.2.** Es existiert ein  $\mathbf{Q}_{1/2}$  gegeben durch  $\mathbf{Q}_{1/2}^\top \mathbf{Q}_{1/2} = \mathbf{Q}$ , sodass das Paar  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C}, \mathbf{A})$  entdeckbar ist.

Die erste Annahme ist die schwächste, die getroffen werden muss, um das System (3.1) generell durch eine Regelung stabilisieren zu können. Die zweite Annahme ist eine schwache Standardannahme in der Literatur zur optimalen Regelung [6] und ist die schwächste, gängige Annahme im Zusammenhang mit dem Problem OFP<sub>∞</sub>3.1, siehe [92]. Oft werden strengere Annahmen vorausgesetzt, wie die vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit in [11, 107, 117, 167], die jedoch nicht erforderlich sind.

<sup>1)</sup>Siehe Definition 2.2 in Abschnitt 2.2, S. 15.

<sup>2)</sup>Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit sind in Anhang B.1, S. 221, definiert.

Die nächste Annahme wird eine wichtige Rolle bei der Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  spielen und wird im Anschluss detailliert erläutert.

**Annahme 3.3** (Beschränkte Solltrajektorien und Störungen). Für jeden Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  des Exosystems entfällt der Realteil, d. h.  $\Re\{\bar{\lambda}\} = 0$ , und die algebraische Vielfachheit ist identisch zur geometrischen.

Diese Annahme garantiert, dass alle Zustände des Exosystems und somit  $\|\bar{\mathbf{x}}(t)\|_2$  für jedes  $t \in [0, \infty)$  beschränkt sind. Sie stellt sicher, dass weder exponentiell wachsende Zustände noch Integratorketten und somit Polynome in der Zeit als Zustandsverläufe auftreten können. Eine solche Forderung nach der Beschränkung von Solltrajektorien und Störungen ist Standard in Hinblick auf die Lösung von Problemen wie  $\text{OFP}_\infty 3.1$ , vgl. dazu z. B. [11, 92, 117, 152, 167] und [171, Kap. 6 und 7].

Die Annahme 3.3 schließt auch den Fall  $\Re\{\bar{\lambda}\} < 0$  und damit asymptotisch stabile Verläufe von  $\bar{\mathbf{x}}$  aus. Dies ist jedoch keine Einschränkung, da mit Annahme 3.1 die asymptotisch stabile Teildynamik des Exosystems (3.2a) auch als stabilisierbare Teildynamik des Systems (3.1a) modelliert werden könnte. Außerdem sind asymptotisch abklingende Solltrajektorien im Rahmen einer Folgeregelung ohnehin wenig von Interesse, da sie wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0}$  stationär entfallen [155, Abschnitt 9.1].

Falls dennoch unbeschränkte Solltrajektorien oder auch Störungen vorliegen, ist davon auszugehen, dass nicht ein unendlicher, sondern ein endlicher Horizont relevant ist. Dieser kann natürlich ebenso von Interesse sein, falls Annahme 3.3 doch erfüllt ist. Für den endlichen Horizont wird das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_T 2.1$  aus Abschnitt 2.1 betrachtet, dass hier noch einmal angegeben wird:

**Optimales Folgeregelungsproblem:  $\text{OFP}_T 3.1$**  (Endlicher Horizont). Für *gegebene* Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  des Systems (3.1) und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  des Exosystems (3.2) sowie ein *gegebenes*  $T > 0$ , finde eine *zulässige* Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  der Systemdynamik (3.1) auf dem Intervall  $[0, T]$ , die die Kosten  $J_{0,T}(\cdot)$  in (3.3) *minimiert*.

Die Lösung dieses Problems wurde bereits in Abschnitt 2.4.1 hergeleitet und auch deren Nachteile diskutiert. Dabei hat sich herausgestellt, dass das optimale Regelgesetz zeitvariant ist, was jedoch oft für eine Implementierung unerwünscht ist. Außerdem wird in vielen praktischen Fällen das Ende des Horizontes  $T$  nicht exakt vorausgesagt werden können. Dessen genaue Kenntnis ist jedoch zur Implementierung zwingend erforderlich.

Aus diesen Gründen wird in diesem Kapitel erörtert, inwieweit der Kandidat einer Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  Nachteile, wie die Zeitvarianz,



vermeidet und die Möglichkeit bietet, die Lösung des Problems  $\text{OFP}_{T3.1}$  zumindest auf Teilen des Intervalls  $[0, T]$  zu approximieren. Hierbei wird der Nachweis der Existenz und die Konstruktion einer Turnpike nach Definition 2.6, S. 23, und eines Agreeable Plan nach Definition 2.7, S. 26, im Vordergrund stehen.

## 3.2 Beiträge und Aufbau dieses Kapitels

Wie in Kapitel 1 diskutiert, ist das Hauptziel dieser Arbeit, Verfahren für den Entwurf von Folgeregelungen für quadratische, unteraktuierte und überaktuierte Systeme herzuleiten. In dieser Hinsicht ist es ein wichtiger Aspekt der Probleme  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  und  $\text{OFP}_{T3.1}$ , dass das Verhältnis der Anzahl der Ausgänge  $p$  zu der der Aktoren  $m$  bzw. das wichtigere Verhältnis zum Rang der Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  keinen Einfluss auf die Existenz einer Lösung hat. Das bedeutet, dass das hier beigetragene Lösungsverfahren für das Problem  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  den Entwurf einer Trajektorienfolgeregelung für alle drei Systemklassen aus Definition 2.1, insbesondere sowohl für eine *Überaktuierung*

$$\text{rang}(\mathbf{B}) > p \quad (3.4)$$

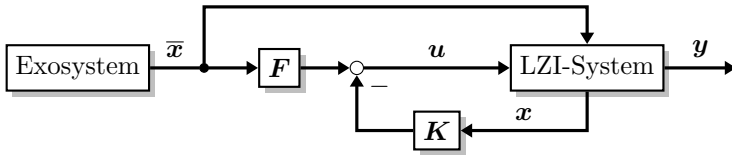
als auch für eine *Unteraktuierung*

$$\text{rang}(\mathbf{B}) < p, \quad (3.5)$$

ermöglicht.<sup>3)</sup> In beiden Fällen kann über die Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  die Relevanz des Folgefehlers  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$  gegenüber der benötigten Stellenergie  $\int_0^T \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \, dt$  beeinflusst werden. Daher kann für eine Überaktuierung eine optimale Folgeregelung gefunden werden, die den Folgefehler nach Wunsch „klein“ hält, gleichzeitig aber die überschüssigen Aktoren bestmöglich zur Einsparung von Stellenergie nutzt. Für eine Unteraktuierung ist es in der Regel unmöglich, den Folgefehler dauerhaft beliebig klein zu halten. Jedoch kann eine optimale Folgeregelung bestimmt werden, die bestmöglich die Energie des Folgefehlers  $\int_0^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \, dt$  senkt, ohne die Aktoren dabei zu stark zu beanspruchen. Diese Überlegungen können auch auf quadratische Systeme mit  $\text{rang}(\mathbf{B}) = p$  übertragen werden, wenn man zwischen einem tolerierbaren Folgefehler und der dafür nötigen Stellenergie abwägen möchte.

---

<sup>3)</sup>Hierbei wird implizit von  $\text{rang}(\mathbf{C}) = p$  ausgegangen, was jedoch im Folgenden nicht vorausgesetzt wird. Siehe hierzu die Erläuterung in Fußnote 1), S. 12.



**Abbildung 3.1:** Hergeleitete Reglerstruktur der Lösung zu Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$ .

Ein weiterer wichtiger Beitrag dieses Kapitels ist es, die Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  in Form einer einfachen statischen Reglerstruktur, die in Abbildung 3.1 dargestellt ist, herzuleiten. Damit unterscheidet sich die Reglerstruktur der optimalen Folgeregelung nicht von der einer exakten Folgeregelung, die mit dem gängigen Verfahren der *Output Regulation*, das im nächsten Kapitel beleuchtet wird, bestimmt wurde. Daher kann das hier hergeleitete Verfahren als eine Alternative zur Output Regulation aufgefasst werden, bei dem die Notwendigkeit entfällt, nach dem asymptotischen Abklingen anfänglicher Fehler der Solltrajektorie exakt folgen zu müssen. Diese Notwendigkeit in der Output Regulation Theorie ist auch der Grund, weshalb diese bisher generell nicht auf unteraktuierte Systeme angewendet werden kann.

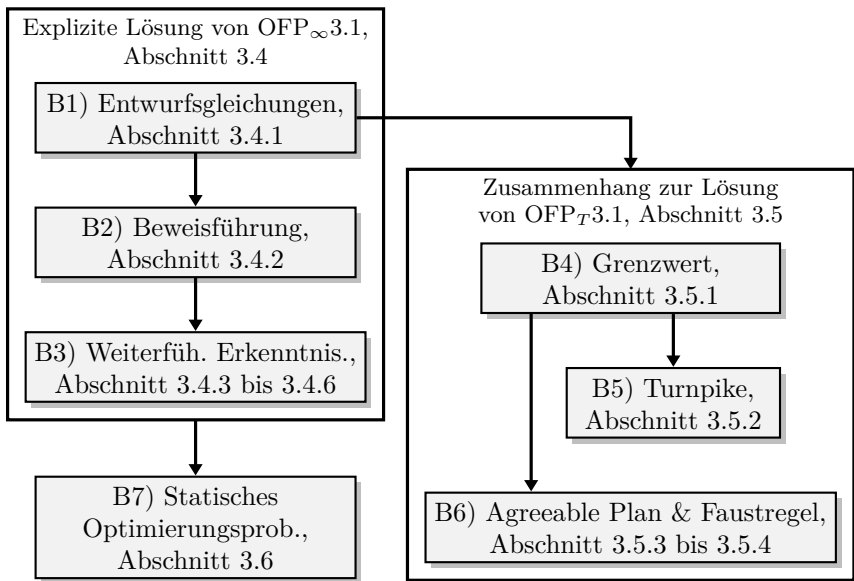
Zusammengefasst, trägt dieses Kapitel ein einheitliches Verfahren zum Entwurf einer Regelung mit einer einfachen Struktur für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme bei. Die einzelnen **Beiträge** dieses Kapitels werden nun im Detail erläutert. Diese wurden bereits in großen Teilen in [20], [21], [22] und [25] veröffentlicht sowie in [24] präsentiert.

- B1) **Entwurfsgleichungen** [22],[25]. Auf Grundlage der notwendigen Optimalitätsbedingungen werden algebraische Entwurfsgleichungen in neuer Gestalt hergeleitet, mit denen ein Kandidat für die Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  bestimmt werden kann.
- B2) **Beweisführung** [22]. Auf Basis der Variationsrechnung wird durch eine Beweisführung die überholende Optimalität dieses Kandidaten für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ , somit für alle Solltrajektorien und Störungen, die durch das Exosystem (3.2) generiert werden können, nachgewiesen. Die Beweisführung erfolgt unter schwächeren Annahmen als in der Literatur. Aus dieser wird auch die stationäre Optimalität<sup>4)</sup> gefolgert.

<sup>4)</sup>Siehe Definition 2.4 in Abschnitt 2.2.1.

- B3) **Weiterführende Erkenntnisse [22].** Eine Analyse der Kosten der gefundenen überholend optimalen Lösung zeigt, dass sich diese aus einem beschränkten Teil und einem unbeschränkten zusammensetzen. Zudem wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie die Güte der Transition, welche die Ausregelung der Störung infolge des Anfangswertes  $\mathbf{x}_0$  erfasst, und die Güte des stationären Verhaltens unabhängig vorgegeben werden können. Dies ist hilfreich, da an beide im Allgemeinen unterschiedliche Anforderungen gestellt werden. Außerdem werden neue Erkenntnisse zu Sonderfällen wie der Reduzierbarkeit auf eine linear-quadratische Regelung erzielt und die Notwendigkeit der Annahme 3.3 anhand eines Beispiels diskutiert.
- B4) **Grenzwert zum Problem OFP<sub>T</sub>3.1 [22].** Durch ein systematisches Vorgehen wird nachgewiesen, dass zu jedem gegebenen Zeitpunkt  $t \in [0, \infty)$  der Kandidat aus B1) der Grenzwert der optimalen Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 für  $T \rightarrow \infty$  ist. Es wird aufgezeigt, dass sich die Kosten beider Lösungen für  $T \rightarrow \infty$  dennoch unterscheiden.
- B5) **Turnpike und Turnpike-Eigenschaft.** Unter Annahme 3.3 wird eine Turnpike konstruiert und eine Turnpike-Eigenschaft für Approximationen der optimalen Lösungen über endliche Horizonte bewiesen. Durch ein Beispiel wird die Notwendigkeit der Annahme 3.3 belegt.
- B6) **Agreeable Plan [22].** Es wird gezeigt, dass der Kandidat aus B1) unter sinnvollen Voraussetzungen ein Agreeable Plan für das Problem OFP<sub>T</sub>3.1 ist, selbst wenn Annahme 3.3 nicht erfüllt wird. Mithilfe dessen kann eine Faustregel formuliert werden, die besagt, wann der Agreeable Plan die optimale Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 auf einem Intervall  $[0, T]$  zufriedenstellend approximieren wird.
- B7) **Statisches Optimierungsproblem [20], [21].** Es wird bewiesen, dass mithilfe eines statischen Optimierungsproblems ein optimales stationäres Verhalten des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 unter bestimmten Bedingungen berechnet werden kann. Dieses Optimierungsproblem wird aus einem von A. J. Krener [108] intuitiv vorgeschlagenem statischen Optimierungsproblem abgeleitet, welches zwar in der Literatur zur Überaktuierung häufig Anwendung findet, für das die Eigenschaften der Lösung aber bisher unerforscht zu sein scheinen.

Die Abbildung 3.2 zeigt, wie die Beiträge aufeinander aufbauen und wie das Kapitel organisiert ist. Abschließend werden in Abschnitt 3.7 die



**Abbildung 3.2:** Aufbau der Beiträge und Struktur des Kapitels.

Beiträge an Simulationsbeispielen zu über- und unteraktuierten Systemen demonstriert und in Abschnitt 3.8 wird ein Fazit gezogen.

### 3.3 Stand der Technik

In der Literatur zu überaktuierten Systemen, wie [20, 51, 66–68, 120, 126, 148, 163, 170], und zu unteraktuierten Systemen, wie [48–50, 52, 54, 73, 140], wird die Möglichkeit, die jeweils gegebene Problemstellung als optimales Folgeregelungsproblem zu formulieren, nahezu außer Acht gelassen. Bei den wenigen Ausnahmen werden jedoch nützliche Methoden, wie die Variationsrechnung, nicht angewendet [48, 50] oder aber keine Entwurfsgleichungen für die Regelgesetze hergeleitet [140, Kap. 17]. Als Konsequenz sind die Anwendungsfälle der Verfahren oft eingeschränkt, z. B. auf konstante Sollwerte [49, 51, 52, 54, 73, 170], auf periodische Sollwerte [66, 148] oder auf Systeme mit skalarer Stellgröße [48–50]. Auch muss die Reglerstruktur in Abbildung 3.1 oft um eine zusätzliche Reglerdynamik erweitert werden [51, 66, 67, 148, 170]. Ein anderer Ansatz [37] formuliert anstelle

von (3.3) quadratische Kosten im Frequenzbereich und bestimmt ein Regelgesetz, das diese minimiert. Die Rücktransformation dieses Regelgesetzes in den Zeitbereich ist jedoch aufwendig und es wird nicht analysiert, welche Eigenschaften die erzielte Lösung im Zeitbereich aufweist. Es ist festzustellen, dass in der Literatur zu unteraktuierten und überaktuierten Systemen bisher kein einfaches einheitliches Verfahren präsentiert wurde, das auf beide Fälle angewendet werden kann. Ein solches Verfahren ist ein zentraler Beitrag dieses Kapitels.

Ein Grund für die vorangegangenen Beobachtungen könnte sein, dass optimale Folgeregelungen auch über unendliche Horizonte im Allgemeinen zeitvariant sind, wie z. B. in [6, 11, 92, 117, 152], und die in Abschnitt 2.4.1 diskutieren Nachteile aufweisen. Können Solltrajektorien und Störungen allerdings durch ein Exosystem (3.2) modelliert werden, dann geht zumindest die Lösung des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  für  $T \rightarrow \infty$  im Grenzwert in ein statisches Regelgesetz wie in Abbildung 3.1 über. Dieses Ergebnis geht auf [107] zurück und wird im Rahmen von Beitrag B4) in Abschnitt 3.5.1 genauer beleuchtet. Allerdings wird diese interessante Erkenntnis in der Standardliteratur zur optimalen Regelung nicht vermittelt, vgl. z. B. [6, 13, 39, 112, 119, 121], und die Entwurfsgleichungen aus [107] sind bis auf Ausnahmen, wie [123], nicht in der Lehrliteratur verbreitet.

Wichtig ist an dieser Stelle zu bemerken, dass keinesfalls davon ausgegangen werden kann, dass dieser Grenzwert tatsächlich auch eine Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  ist. Genauer gesagt, kann dieser Grenzwert existieren, obwohl es keine Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  gibt, was in Abschnitt 3.5.1 erörtert wird. Auf diesen Sachverhalt wird teils in der Literatur nicht eingegangen oder sogar aus der Existenz des Grenzwertes fälschlicherweise Optimalität gefolgert, siehe [6, 55, 130, 149]. In [56, 123] und [130] wird von einem Minimum der Kosten  $\lim_{T \rightarrow \infty} J_{0,T}(\cdot)$  für die zu diesem Grenzwert zugehörige Regelung ausgegangen, jedoch sind die Kosten generell nur unter speziellen restriktiven Annahmen beschränkt. Unter üblichen Annahmen sind sie hingegen in der Regel für jede Regelung unbeschränkt und ein Minimum existiert nicht. Dann bleibt unklar, ob die Regelung dieses Grenzwertes überhaupt vorteilhafte Eigenschaften aufweist. Ausnahmen von dieser Regel treten auch nur in Sonderfällen auf, die in [13, Abschnitt 9-11], [6, Kap. 4], [106, 135, 136] diskutiert und in [164, Kap. 5] zusammengefasst werden. Der Beitrag B4) in Abschnitt 3.4.5 liefert neue und einfach zu prüfende Kriterien, wann diese Sonderfälle auftreten.

Im Rahmen des Beitrages B1) in Abschnitt 3.4.1 wird abweichend von dem Ansatz per Grenzwertbildung ein Kandidat für das Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  mithilfe der notwendigen Bedingungen aus Abschnitt 2.5.1 her-

geleitet. Dieser wird die gewünschte Struktur aus Abbildung 3.1 aufweisen. Liegen lediglich konstante Sollgrößen und Störungen vor, so kann aus den Ergebnissen von [167] gefolgert werden, dass dieser Kandidat auch das Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  löst. Für allgemeinere Exosysteme unter Annahme 3.3 sind keine Resultate aus der Literatur bekannt, die diese Schlussfolgerung unter den schwachen Annahmen 3.1 und 3.2 zulassen. Beispielsweise wird in [92] die Klasse der zulässigen Lösungen eingeschränkt. In [11] wird die Periodizität der Solltrajektorien vorausgesetzt. Außerdem muss das System vollständig steuerbar und beobachtbar sein, was auch in [117] notwendig ist. Die in [152] getroffenen Annahmen stimmen zwar mit den hier vorausgesetzten überein, jedoch ist der Beweis der zentralen Aussage von [152, Theorem 3.1] fehlerhaft, wie es in der Bemerkung 3.11 in Abschnitt 3.5.1 erörtert wird. Daher können keine Rückschlüsse aus [152] gezogen werden.

Wie bereits in Abschnitt 2.5.2 resümiert, sind weiterhin keine geeigneten, einfach anzuwendenden hinreichenden Optimalitätsbedingungen für das vorliegende Problem bekannt. Der Beitrag B2) in Abschnitt 3.4.2 ist daher eine individuelle Beweisführung zur überholenden Optimalität, aus der auch die stationäre Optimalität gefolgert werden kann. Letzteres ist eine starke Eigenschaft, die nur selten für einen gegebenen Kandidaten nachgewiesen wird, wie z. B. in [117].

Aus dem Beitrag B4) zur Grenzwertbildung werden in Abschnitt 3.5.2 die Beiträge B5) zur Turnpike abgeleitet. Zur Charakterisierung einer Turnpike wird meist lediglich ein periodisches optimales Regelungsproblem unter der Voraussetzung angegeben, dass periodische Solltrajektorien und Störgrößen vorliegen, vgl. [171, Kap. 6] und [173, Kap. 2]. Für diesen Fall wird eine explizite Bestimmung einer Turnpike für linear-quadratische Probleme in [154] vorgestellt. Liegen hingegen nichtperiodische Einflüsse vor, so wird in [171, Kap. 7] gar keine Vorschrift zur Bestimmung angegeben. In dieser Hinsicht ist eine einfache, explizite Konstruktionsvorschrift einer Turnpike auch für nichtperiodische Solltrajektorien und Störungen als Beitrag von Abschnitt 3.5.2 hervorzuheben. Auch die Demonstration, dass im Allgemeinen keine Turnpike bei Verletzung der Annahme 3.3 existiert, ist eine interessante Erkenntnis.

Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, ist es der Standard in der Literatur, die Beschränkung der Soll- und Störgrößen durch eine Annahme wie Annahme 3.3 vorzusetzen. Ein Entfallen einer solchen Annahme wird dann nicht erörtert. Dass ohne Beschränkung dieser Größen tatsächlich die Existenz einer Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  nicht zu erwarten ist, ist der Beitrag B4) von Abschnitt 3.4.6. Interessanter ist jedoch der Beitrag B6) in Abschnitt 3.5.3. Dieser belegt, dass der Kandidat aus Beitrag B1) un-

ter schwächeren Voraussetzungen als Annahme 3.3 ein Agreeable Plan ist. Demgemäß ist dieser trotz unbeschränkter Soll- und Störgrößen eine sinnvolle Wahl, insbesondere falls ein unbekannter, hinreichend langer Horizont vorliegt.

In Publikationen zu überaktuierten Systemen, wie [69, 70, 148], wird die Lösung eines statischen Optimierungsproblems nach [108] angewendet, um die überschüssigen Aktoren effizient zu nutzen. Ob dies tatsächlich gelingt, ist bisher jedoch nicht erwiesen. Der Beitrag B7) in Abschnitt 3.6 beweist, dass diese Lösung zu einem optimalen stationären Verhalten eines entsprechend formulierten Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  führt, falls eine spezielle Zustandsraumdarstellung des Exosystems gewählt wird.

Auf Basis des Stands der Technik ist festzustellen, dass die Literatur keine Analyse zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  bietet, die so umfassend und detailliert ist, wie die hier präsentierte.

## 3.4 Explizite Lösung des Problems über unendliche Horizonte

In diesem Abschnitt wird eine optimale Lösung zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  hergeleitet. Hierzu zählen das Aufstellen von algebraischen Entwurfsgleichungen, eine Beweisführung zur überholenden Optimalität sowie weiterführende Erkenntnisse. Dies umfasst daher die in Abschnitt 3.2 erläuterten Beiträge B1) bis B3), S. 63.

### 3.4.1 Herleitung algebraischer Entwurfsgleichungen in neuer Form

Das Ziel ist es, einen Kandidaten  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  für die Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  zu bestimmen, der die notwendigen Optimalitätsbedingungen aus Abschnitt 2.5.1 für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  erfüllt. Es wird analog zu Abschnitt 2.3.2 vorgegangen. Die Ergebnisse wurden in der Veröffentlichung [22] vorgestellt.

Hierzu wird zunächst die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t) = \frac{1}{2} \left( (C\mathbf{x} + (D_d - \bar{C})\bar{\mathbf{x}})^T Q (C\mathbf{x} + (D_d - \bar{C})\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} \right) + \phi^T (A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + E_d \bar{\mathbf{x}}) \quad (3.6)$$

mit dem Kozustand  $\phi(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  aufgestellt. Aus der notwendigen Optimalitätsbedingung (2.97b) im Satz 2.3, S. 48, folgt

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* = \mathbf{R}\mathbf{u}^* + \mathbf{B}^\top \phi = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Daraus resultiert der Kandidat für eine überholend optimale Regelung zu

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \phi(t) \quad (3.8)$$

für jedes  $t \in [0, \infty)$ . Setzt man diesen Kandidaten in die Systemdynamik (3.1a) ein und führt diese mit der zweiten notwendigen Optimalitätsbedingung (2.97a)

$$\dot{\phi} = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_* = -\mathbf{A}^\top \phi - \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{C}\mathbf{x}^* + (\mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}) \quad (3.9)$$

zusammen, so erhält man das Hamiltonsche System

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^* \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix}}_{=\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}. \quad (3.10)$$

Dieses fasst die notwendigen Bedingungen (2.97a) und (2.97b) zusammen. Die Anfangsbedingung  $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0$  ist gegeben. Dahingegen kann der Anfangswert  $\phi(0)$  nach Satz 2.3 völlig frei gewählt werden.

Es stellt sich nun die Frage, welche Wahl von  $\phi(0)$  geeignet ist. Die gleiche Frage stellte sich bereits für den linear-quadratischen Regler in Abschnitt 2.6. Jedoch fällt beim Vergleich der beiden Hamiltonschen Systeme auf, dass (3.10) im Gegensatz zu (2.111) ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem (DGLS) ist. Daher unterteilt man die Lösung mittels einer Superposition in zwei Teile:

$$\mathbf{x}^*(t) = \widetilde{\mathbf{x}}^*(t) + \mathbf{x}_s^*(t), \quad (3.11a)$$

$$\phi(t) = \widetilde{\phi}(t) + \phi_s(t). \quad (3.11b)$$

Die ersten Summanden  $\widetilde{\mathbf{x}}^*(\cdot)$  und  $\widetilde{\phi}(\cdot)$  lösen dabei das homogene DGLS, das aus (3.10) für  $\overline{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$  hervorgeht. Die zweiten Summanden  $\mathbf{x}_s^*(\cdot)$  und  $\phi_s(\cdot)$  bilden dann die partikuläre Lösung zum inhomogenen DGLS (3.10).

Da die Inhomogenität von einem speziellen Typ ist, hier löst  $\overline{\mathbf{x}}(t)$  das homogene Exosystem (3.2), bietet sich ein *Ansatz vom Typ der rechten*



Seite für  $\mathbf{x}_s^*(t)$  und  $\phi_s^*(t)$  an, vgl. [9, Kap. 13.4]. Für diesen Fall ist ein geeigneter Ansatz in der Output Regulation Theorie [89, 95, 140], die in Kapitel 4 näher behandelt wird, zu finden. Dieser lautet

$$\mathbf{x}_s^*(t) = \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t), \quad (3.12a)$$

$$\phi_s^*(t) = \mathbf{\Pi}_\phi^* \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (3.12b)$$

mit  $\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi^* \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$ . Durch das Einsetzen dieses Ansatzes in (3.10) unter der Nutzung der Dynamik des Exosystems  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$  in (3.2) wird ersichtlich, dass dieser Ansatz das DGLS (3.10) für jeden beliebigen Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  erfüllt, falls  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi^*)$  die folgende *Sylvestergleichung* löst:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_x^* \\ \mathbf{\Pi}_\phi^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_x^* \\ \mathbf{\Pi}_\phi^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \\ \mathbf{E}_d \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Es verbleibt die Aufgabe, die Lösung  $\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\phi}$  des homogenen Hamiltonschen Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^* \\ \dot{\tilde{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^* \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

zum Anfangswert  $\tilde{\mathbf{x}}^*(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}_0$  zu bestimmen. Man stellt fest, dass (3.14) genau dem Hamiltonschen System (2.111) (für  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}\mathbf{C}$ ) aus Abschnitt 2.6 entspricht. Den Herleitungen in Abschnitt 2.6 folgend muss  $\tilde{\phi}(0) = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}(0)$  gewählt werden, wobei  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die positiv semidefinite, symmetrische Lösung der algebraischen Riccatigleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

ist. Eine solche Lösung der Riccatigleichung existiert immer unter den Annahmen 3.1 sowie 3.2 und ist eindeutig, siehe [110]. Wie in Abschnitt 2.6 gezeigt, resultiert dann  $\tilde{\phi}(t) = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}(t)$  und  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  löst

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^* = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})\tilde{\mathbf{x}}^* \quad (3.16)$$

zum Anfangswert  $\tilde{\mathbf{x}}^*(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}_0$ . Da die Systemmatrix bekanntlich eine Hurwitzmatrix ist [6], folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{0}$  und daraus auch  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ . Daher wird  $\mathbf{x}_s^*(t) = \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  auch als *stationäre Lösung* der Systemdynamik (3.1a) und  $\tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  als Fehler oder Abweichung von dieser bezeichnet.

Setzt man die gefundenen Lösungen  $\tilde{\phi}(\cdot)$  und  $\phi_s(\cdot)$  zur Bestimmung von  $\phi(\cdot)$  in (3.11b) ein, so erhält man den Ansatz

$$\phi(t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) + \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (3.17)$$

Wird  $\phi(0)$  entsprechend gewählt, dann löst (3.17) die Kozustandsdynamik für beliebige, gegebene  $\mathbf{x}_0$  sowie  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und für den Kandidaten (3.8) einer überholend optimalen Regelung sind damit die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllt. Man kommt zu dem Resultat:

**Satz 3.1** (Reglerentwurf). *Seien die Annahmen 3.1 und 3.2 erfüllt. Es existiert eine positiv semidefinite, symmetrische Matrix  $\mathbf{P}$ , die die algebraische Riccatigleichung (3.15) eindeutig löst. Es gelten die Eigenwertbedingungen*

$$\Re\{\lambda\} + \Re\{\bar{\lambda}\} < 0 \quad (3.18)$$

*und  $\Re\{\bar{\lambda}\} \geq 0$  für alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  und alle  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $(\Pi_x^*, \Pi_\phi)$  der Sylvestergleichung (3.13). Für beliebige, gegebene Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sei  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  die zulässige Lösung des asymptotisch stabilen geschlossenen Regelkreises (3.1a) zum zeitinvarianten Regelgesetz*

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}^*(\mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (3.19)$$

*mit der Rückführmatrix  $\mathbf{K}^*$  und der Vorfiltermatrix  $\mathbf{F}^*$ , die durch*

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}, \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{F}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi \quad (3.20b)$$

*gegeben sind. Dann sind für alle gegebenen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen (2.97) aus Satz 2.3 zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  durch die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  erfüllt.*

*Außerdem weist die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  das stationäre Verhalten  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) := (\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  auf, da*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}, \quad (3.21a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{u}^*(t) - \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}. \quad (3.21b)$$

*Beweis.* Berücksichtigt man die vorangegangene Herleitung, so verbleibt es lediglich zu zeigen, dass die Sylvestergleichung (3.13) unter den getroffenen Annahmen eine eindeutige Lösung hat. Aus Anhang A.1 ist bekannt, dass die lineare, algebraische Gleichung (3.13) mittels der Kronecker-Summe<sup>5)</sup>

<sup>5)</sup>Für die Matrizen  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$  und  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  gilt  $\bar{\mathbf{A}}^\top \oplus -\mathbf{H} = \bar{\mathbf{A}}^\top \otimes \mathbf{I}_{2n} + \mathbf{I}_{\bar{n}} \otimes -\mathbf{H}$  mit dem Kronecker-Produkt aus Definition A.3 in Anhang A.1.

$\oplus$  und des Operators  $\text{vec}(\cdot)$  zur Vektorisierung, der die Spalten einer Matrix gemäß (A.5) im Abschnitt A.1 stapelt, umgeschrieben werden kann zu

$$(\bar{\mathbf{A}}^\top \oplus -\mathbf{H}) \text{vec} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_x^* \\ \boldsymbol{\Pi}_\phi \end{bmatrix} \right) = \text{vec} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix} \right) \quad (3.22)$$

mit der Matrix  $\mathbf{H}$  aus (3.10). Hierbei handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem, das bekanntlich immer eine eindeutige Lösung hat, falls die quadratische Matrix  $(\bar{\mathbf{A}}^\top \oplus -\mathbf{H})$  keinen Eigenwert in null aufweist. Das Spektrum der Matrix lautet nach [30, Kap 7.2]

$$\sigma(\bar{\mathbf{A}}^\top \oplus -\mathbf{H}) = \{\bar{\lambda} + \lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}}), \lambda \in \sigma(-\mathbf{H})\}. \quad (3.23)$$

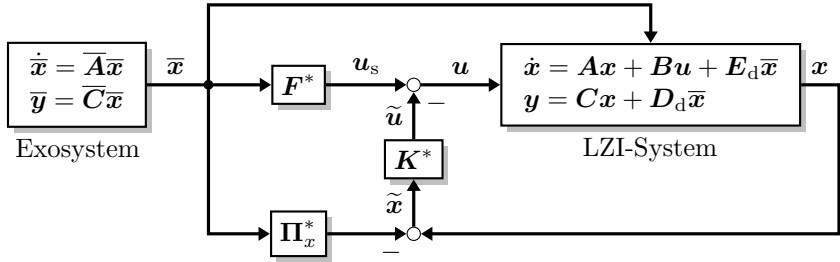
Da alle Eigenwerte  $\bar{\lambda}$  von  $\bar{\mathbf{A}}$  einen nicht negativen Realteil haben, ist folglich die Summe  $\bar{\lambda} + \lambda$  nur für die Eigenwerte  $\lambda$  von  $-\mathbf{H}$  mit nicht positivem Realteil zu prüfen. Unter den getroffenen Annahmen weist die Hamiltonsche Matrix  $\mathbf{H}$  keine Eigenwerte auf der imaginären Achse auf und das Spektrum ist symmetrisch zur imaginären Achse [6]. Da man  $\mathbf{H}$  nach Abschnitt 2.6 in die blockdiagonale Gestalt (2.114) transformieren kann, folgt

$$\sigma(\mathbf{H}) = \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}) \cup \sigma(-(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})). \quad (3.24)$$

Die Eigenwerte von  $-\mathbf{H}$  mit nicht positivem Realteil sind somit die des geschlossenen Regelkreises  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}) \subset \mathbb{C}^-$ . Durch die Eigenwertbedingung (3.18) ist  $\bar{\lambda} + \lambda \neq 0$  für alle diese  $\lambda$  und alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  gewährleistet und die Matrix  $(\bar{\mathbf{A}}^\top \oplus -\mathbf{H})$  hat keinen Eigenwert in null.  $\square$

Der geschlossenen Regelkreises mit dem Regelgesetz (3.19) liegt in einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur vor und ist in Abbildung 3.3 abgebildet. Es folgen Bemerkungen unter anderem zu der Eigenwertbedingung (3.18), der Berücksichtigung von Zustands- oder Störgrößenbeobachtern und einem Durchgriff der Stellgröße  $\mathbf{u}$  auf den Ausgang  $\mathbf{y}$ .

**Bemerkung 3.1.** Die Eigenwertbedingung (3.18) besagt, dass der Fehler  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  „schneller“ gegen null konvergiert wird als der Zustand  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  des Exosystems divergieren kann. Dies stellt sicher, dass die Transition des Ausganges  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}}(t)$  zu seinem stationären Zustand  $(\mathbf{C}\boldsymbol{\Pi}_x^* + \mathbf{D}_d)\bar{\mathbf{x}}(t)$  vollzogen ist, bevor relevante Teile der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  durchlaufen werden. Jede sinnvolle Trajektorienfolgeregelung muss dieses Kriterium erfüllen. Daher ist die Bedingung (3.18) keine strenge, sondern eine sinnvolle Forderung. Sie ist offensichtlich erfüllt, falls Annahme 3.3 gilt, da dann  $\Re\{\bar{\lambda}\} = 0$  für alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$ . Falls Annahme 3.3



**Abbildung 3.3:** Hergeleitete Reglerstruktur des Kandidaten aus Satz 3.1.

nicht gültig ist, dann ist die Eigenwertbedingung zwar prinzipiell nicht notwendig für die Existenz des Regelgesetzes (3.19), jedoch wird sie für den Nachweis vorteilhafter Eigenschaften des Regelgesetzes benötigt. So wird sie eine wichtige Rolle bei der Herleitung des Grenzwertes der Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 für  $T \rightarrow \infty$  in Abschnitt 3.5.1 einnehmen.

**Bemerkung 3.2.** Die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur könnte ohne Weiteres in die Struktur von Abbildung 3.1 umgeformt werden. Jedoch kann bei der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur die Rückführmatrix  $K^*$  prinzipiell durch jede beliebige andere stabilisierende Rückführmatrix ersetzt werden, ohne das stationäre Verhalten  $x_s^* = \Pi_x^* \bar{x}$  zu beeinflussen. Dies ist von Vorteil, falls für die Transition  $\tilde{x}(t)$  andere Gütekriterien als für das stationäre Verhalten  $x_s^* = \Pi_x^* \bar{x}$  vorliegen, was in Abschnitt 3.4.4 erörtert wird.

**Bemerkung 3.3.** Das Exosystem muss nicht zur Laufzeit gelöst werden. Stattdessen kann die Transitionsmatrix  $e^{\bar{A}t}$  offline explizit bestimmt werden, sodass zur Laufzeit lediglich  $\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t} \bar{x}_0$  ausgewertet werden muss. Ist der Anfangszustand  $\bar{x}_0$  jedoch nicht messbar, was in der Regel für das Teilsystem der Störungen zu erwarten ist, dann kann die Reglerstruktur auch um einen Störgrößenbeobachter ergänzt werden. Ebenso ist die Erweiterung durch einen Zustandsbeobachter möglich, falls  $x$  nicht gemessen werden kann. Beides setzt natürlich hinreichende Annahmen zur Beobachtbarkeit voraus. Welche Einflüsse dies auf die Optimalitätseigenschaften des geschlossenen Regelkreises hat, wird in Abschnitt 3.4.4 diskutiert.

**Bemerkung 3.4.** Der Beweis von Satz 3.1 zeigt auch, wie eine Sylvester-Gleichung wie (3.13) explizit gelöst werden kann [30, Kap. 7.2]. Es verbleibt lediglich in (3.22) von links mit der Inverse  $(\bar{A}^T \oplus -H)^{-1}$  zu multiplizieren

und anschließend die Umkehrabbildung  $\text{vec}^{-1}(\cdot)$  der Vektorisierung anzuwenden. Da die Dimension  $(2n\bar{n})^2$  der zu invertierenden Matrix jedoch groß sein kann, ist es möglicherweise effizienter, auf Algorithmen wie [16] zurückzugreifen.

**Bemerkung 3.5.** Um die Herleitungen übersichtlich zu halten, wurde weder ein Durchgriff  $\mathbf{Du}$  im Ausgang  $\mathbf{y}$  des Systems (3.1) noch ein Mischprodukt  $\mathbf{x}^T \mathbf{Su}$  in den Kosten (3.3) berücksichtigt. Liegen diese vor, so kann das Problem  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  mittels einer Transformation in [6, Kap. 3.4] unter einfachen Voraussetzungen in ein Problem ohne Durchgriff und Mischprodukt überführt werden. Der Kandidat wird wieder mittels der Entwurfsgleichungen (3.13) und (3.15), die für das transformierte System aufgestellt werden, ermittelt. Die resultierende algebraische Riccatigleichung kann auch aus [6, Kap. 3.4] oder [25, Theorem 1] abgelesen werden. Die sich ergebende Sylvestergleichung kann aus der Veröffentlichung [25, Beweis von Theorem 3] gewonnen werden. Werden alle Annahmen und Bedingungen in diesem Kapitel dem transformierten System entsprechend angepasst, so bleiben alle Schlussfolgerungen erhalten.

### 3.4.2 Nachweis der überholenden und stationären Optimalität unter schwachen Annahmen

Im Folgenden wird bewiesen, dass der Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  aus Satz 3.1 eine eindeutige Lösung des Problems  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist. Dies ist ein Hauptresultat dieser Arbeit. Die Beweisführung erfolgt unter schwächeren Annahmen als in der Veröffentlichung [22].

Für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist nach Definition 2.3(ii) der überholenden Optimalität zu zeigen, dass für jede verschiedene zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$  ein  $\epsilon > 0$  und ein  $\hat{T} \geq 0$  existieren, sodass die Kostendifferenz  $\Delta J_{0,T}(\cdot)$  die Ungleichung

$$\Delta J_{0,T}(\cdot) := J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) \geq \epsilon \quad (3.25)$$

für alle  $T \geq \hat{T}$  erfüllt. Es sei daran erinnert, dass es mithilfe der Variationsrechnung in Abschnitt 2.3 und den Ausführungen in Abschnitt 2.5.2 immer möglich ist, jede verschiedene zulässige Lösung durch eine *nicht triviale*, zulässige Variation des Kandidaten  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta \mathbf{x}$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}$  darzustellen. Die nicht triviale Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  heißt zulässig, falls sie die Dynamik

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (3.26)$$

zum Anfangswert  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  und auf dem Intervall  $[0, \infty)$  erfüllt. Dies ermöglicht es, die Kostendifferenz  $\Delta J_{0,T}(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  in (3.25) im folgenden Beweis in die geeignetere Gestalt (2.101) umzuformen.

Es folgt das erste Hauptresultat der Arbeit:

**Satz 3.2** (Überholende Optimalität). *Es seien die Annahmen 3.1, 3.2 und 3.3 aus Abschnitt 3.1 erfüllt. Weiterhin sei gemäß Satz 3.1, S. 71, das eindeutige Regelgesetz (3.19)*

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}^*(\mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t)$$

mit der Rückführmatrix  $\mathbf{K}^*$  und der Vorfiltermatrix  $\mathbf{F}^*$ , die durch (3.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}, \\ \mathbf{F}^* &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi \end{aligned}$$

berechnet werden, gegeben. Hierzu seien die algebraischen Entwurfsgleichungen, das sind die Sylvestergleichung (3.13)

$$\begin{bmatrix} \Pi_x^* \\ \Pi_\phi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_x^* \\ \Pi_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix}.$$

und die algebraische Riccatigleichung (3.15)

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0},$$

gelöst worden. Zu beliebigen, gegebenen Anfangswerten  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sei dann  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  die zulässige Lösung des asymptotisch stabilen geschlossenen Regelkreises  $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A} \mathbf{x}^* + \mathbf{B} \mathbf{u}^* + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}$ . Für alle gegebenen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  die eindeutige Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub> 3.1 und daher eine überholend optimale Lösung gemäß Definition 2.3(ii), S. 17.

*Beweis.* Infolge der Annahmen ist Satz 3.1 anwendbar. Zu beliebigen Anfangswerten existiert die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  und sie erfüllt die notwendigen Optimalitätsbedingung aus Satz 2.3. Daraus resultiert, dass die Kostendifferenz in (3.25) nach (2.101) in Abschnitt 2.5.2 durch

$$\begin{aligned} \Delta J_{0,T}(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) &= \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) + \frac{1}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \\ &= -\phi(T)^\top \delta \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (\delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u}) dt \quad (3.27) \end{aligned}$$

bestimmt ist, da sich jede verschiedene zulässige Lösung durch eine nicht triviale, zulässige Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  beschreiben lässt. Hierin ist  $\phi(t)$  durch (3.17) für alle  $t \in [0, \infty)$  bestimmt. Wegen Annahme 3.3 ist  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  beschränkt auf  $[0, \infty)$  für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Außerdem ist die Fehlerdynamik (3.16) nach Satz 3.1 asymptotisch stabil und damit ist der Fehler  $\tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  beschränkt für jedes  $\mathbf{x}_0$ . Aufgrund dessen ist auch der Kozustand  $\phi(t) = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) + \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(t)$  in (3.17) auf  $[0, \infty)$  für jedes  $\mathbf{x}_0$  und jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  beschränkt.

Um überholende Optimalität von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  und somit die Aussage zu (3.25) für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  zu beweisen, genügt es, dass

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) = \liminf_{T \rightarrow \infty} (\delta^1 J_T^*(\cdot) + \frac{1}{2} \delta^2 J_T^*(\cdot)) > 0 \quad (3.28)$$

für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und jede zulässige Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  gezeigt wird.<sup>6)</sup> Dies erschwert die erste Variation  $\delta^1 J_T^*(\cdot)$ , weil sie nicht nur negative Werte annehmen, sondern sogar nach  $-\infty$  divergieren könnte. Im Folgenden wird bewiesen, dass diese Effekte stets von einer positiven, ggf. unbeschränkten zweiten Variation  $\delta^2 J_T^*(\cdot)$  überwogen werden und (3.28) erfüllt wird. Hierfür ist eine Fallstudie hilfreich. Alle nicht trivialen, zulässigen Variationen können immer einem der folgenden **drei Fälle** zugeordnet werden:

1. Die Zustandsvariation konvergiere gegen null:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .
2. Die Zustandsvariation konvergiere nicht gegen null. Stattdessen gelte  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}(t)\|_2 > 0$  und  $\delta \mathbf{x}(t)$  sei beschränkt.
3. Die Zustandsvariation sei unbeschränkt:  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}(t)\|_2 = \infty$ .

Für die Fallstudie wird angenommen, dass  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  vollständig steuerbar ist. Dies ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer möglich: Die Dynamik (3.26) der Variation kann gemäß Abschnitt B.2, S. 221, immer in ein vollständig steuerbares Teilsystem und ein autonomes Teilsystem  $\delta \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{22} \delta \mathbf{x}_2$  mit dem Zustand  $\delta \mathbf{x}_2(\cdot)$  zerlegt werden. Aus dem Anfangswert  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  folgt  $\delta \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0}$  und somit ist die Variation  $\delta \mathbf{x}_2(t) \equiv \mathbf{0}$  immer trivial.<sup>7)</sup> Damit hat die Variation  $\delta \mathbf{x}_2(\cdot)$  keinen Einfluss auf die Kostendifferenz (3.27) und muss in der Analyse nicht weiter berücksichtigt

<sup>6)</sup>Siehe Anhang A.1 für eine Definition des Limes inferior.

<sup>7)</sup>Demnach weisen alle zulässigen Lösungen den gleichen Verlauf  $\mathbf{x}_2(t)$  auf. Aufgrund von Annahme 3.1 ist das Teilsystem mit dem Zustand  $\mathbf{x}_2$  asymptotisch stabil.

werden. Um die Zerlegung zu vermeiden, wird nun der Einfachheit halber die vollständige Steuerbarkeit angenommen.

Weiterhin sei für die Fälle 2 und 3 zunächst eine strengere Annahme als 3.2 vorausgesetzt:

**Annahme 3.4.** Es existiert ein  $\mathbf{Q}_{1/2}$  gegeben durch  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{1/2}^\top \mathbf{Q}_{1/2}$ , sodass das Paar  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C}, \mathbf{A})$  vollständig beobachtbar ist.

Nach der Fallstudie wird auf die schwächere Annahme 3.2 eingegangen.

**Fall 1.** Da  $\phi(t)$  beschränkt ist, folgt aus der Konvergenz von  $\delta \mathbf{x}(t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\phi(T)^\top \delta \mathbf{x}(T) = 0 \quad (3.29)$$

und damit

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\cdot) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^T \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u} \, dt. \quad (3.30)$$

Zwei Varianten solcher nicht trivialer Variationen auf dem Intervall  $[0, \infty)$  sind prinzipiell möglich. Entweder ist  $\delta \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ , was  $\delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  erfordert und nur auftreten kann, falls  $\text{rang}(\mathbf{B}) < m$  vorliegt. Oder aber es gilt  $\delta \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ , was wegen des Anfangswertes  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  ebenfalls  $\delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  erfordert. Aufgrund der Definition 2.2 zulässiger Lösungen, S. 15, ist  $\delta \mathbf{u}(\cdot)$  eine stückweise stetige Funktion. Sei  $\delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  auf  $[0, \hat{T}]$  für ein  $\hat{T} > 0$ , dann erhält man nach Integration  $\delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) > 0$  für alle  $T \geq \hat{T}$  aufgrund von  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ . Folglich ist  $\liminf_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\mathbf{0}, \delta \mathbf{u}(\cdot)) > 0$  erfüllt und damit auch (3.28), da  $\delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  über dem unendlichen Horizont  $[0, \infty)$ .

**Fall 2.** Die erste Variation  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  ist beschränkt für  $T \in (0, \infty)$ , weil  $\delta \mathbf{x}(T)$  und  $\phi(T)$  beschränkt sind. Jedoch nimmt  $\liminf_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\cdot)$  möglicherweise einen negativen Wert an. Da aber  $\delta \mathbf{x}(t)$  nicht gegen null konvergiert, kann im Anschluss gezeigt werden, dass die positive, monoton wachsende zweite Variation  $\delta^2 J_T^*(\cdot)$  für  $T \rightarrow \infty$  unbeschränkt ist. Daraus resultiert

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq \liminf_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\cdot) + \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \delta^2 J_T^*(\cdot) = +\infty \quad (3.31)$$

und die Ungleichung (3.28) ist erfüllt.<sup>8)</sup>

<sup>8)</sup>Hierbei wurde angewendet, dass zwei reelle Folgen  $a_n$  und  $b_n$  die Ungleichung  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$  erfüllen, solange nicht der Limes inferior einer der beiden Folgen  $+\infty$  und der der anderen  $-\infty$  ist, vergleiche [4, Abschnitt II.5].



Die Zustandsvariation  $\delta \mathbf{x}(t)$  konvergiert nicht gegen null. Daher ist es immer möglich, eine passende, streng monoton wachsende Sequenz  $T_0, T_1, T_2, \dots$  zu finden, sodass  $[0, \infty) = \cup_{i=1,2,\dots} [T_{i-1}, T_i]$ , die Länge  $T_i - T_{i-1}$  der Teilintervalle für  $i \rightarrow \infty$  nicht gegen null konvergiert und die Folge  $(\delta \mathbf{x}(T_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$  nicht gegen null konvergiert. Man unterteilt die zweite Variation den Intervallen entsprechend:

$$\delta^2 J_{T_k}^*(\cdot) = \sum_{i=1}^k \delta^2 J_{T_{i-1}, T_i}^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = \sum_{i=1}^k \int_{T_{i-1}}^{T_i} (\delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u}) dt. \quad (3.32)$$

Um eine untere Schranke für die zweite Variation zu bestimmen, stellt man für jedes Intervall das optimale Regelungsproblem 2.1 für vorgegebene Endwerte aus Abschnitt 2.4.2, S. 43, auf:

$$\min_{\mathbf{u}_i(\cdot)} \delta^2 J_{T_{i-1}, T_i}^*(\mathbf{u}_i(\cdot)), \quad (3.33)$$

wobei  $\mathbf{u}_i(t): [T_{i-1}, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{x}_i(t): [T_{i-1}, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zulässige Lösung der Dynamik (3.26) zu dem Anfangswert  $\mathbf{x}_i(T_{i-1}) = \delta \mathbf{x}(T_{i-1})$  und dem vorgegebenen Endwert  $\mathbf{x}_i(T_i) = \delta \mathbf{x}(T_i)$  bilden. Auf Basis der vollständigen Steuerbarkeit von  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  und der angenommenen vollständigen Beobachtbarkeit gemäß Annahme 3.4 kann Satz 2.2 angewendet werden. Demnach existiert immer eine Lösung  $(\mathbf{x}_i^*(\cdot), \mathbf{u}_i^*(\cdot))$  des gegebenen Problems und die minimalen Kosten erfüllen die Ungleichung

$$\delta^2 J_{T_{i-1}, T_i}^*(\mathbf{u}_i^*(\cdot)) \geq \delta \mathbf{x}(T_i)^\top \hat{\mathbf{P}}_{T_i}(T_{i-1}) \delta \mathbf{x}(T_i) \quad (3.34)$$

wegen (2.93) mit der positiv definiten Matrix  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(T_{i-1})$ .<sup>9)</sup> Auf diesem Weg kann eine untere Schranke für die zweite Variation angegeben werden

$$\delta^2 J_{T_k}^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq \sum_{i=1}^k \delta \mathbf{x}(T_i)^\top \hat{\mathbf{P}}_{T_i}(T_{i-1}) \delta \mathbf{x}(T_i). \quad (3.35)$$

Aufgrund der passenden Wahl der Sequenz konvergieren die einzelnen Summanden der Summe nicht gegen null für  $i \rightarrow \infty$ . Damit ist aber eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe verletzt [176, Abschnitt 3.1.4]. Für  $k \rightarrow \infty$  divergiert die Summe gegen  $+\infty$  und die positive zweite Variation ist unbeschränkt. Da die zweite Variation monoton wächst, folgt sofort  $\liminf_{T \rightarrow \infty} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = +\infty$  und (3.28) ist erfüllt.

<sup>9)</sup>Die symmetrische Matrix  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(t)$  löst die Riccatische Matrixdifferenzialgleichung (2.89) (für  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}$ ) auf dem Intervall  $[T_{i-1}, T_i]$  zum Endwert  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(T_i) = \mathbf{0}$ .

**Fall 3.** Analog zum Fall 2 kann zunächst festgestellt werden, dass die monoton wachsende zweite Variation unbeschränkt ist. Dies impliziert wieder

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = +\infty. \quad (3.36)$$

Im Gegensatz zum Fall 2 ist es aber möglich, dass die erste Variation  $\delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = -\phi(T)^\top \delta \mathbf{x}(T)$  ebenfalls unbeschränkt ist. Daher ist

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = -\infty \quad (3.37)$$

möglich. Dies ist auch der einzige verbleibende relevante Fall, da (3.36) für  $\liminf_{T \rightarrow \infty} \delta^1 J_T^*(\cdot) > -\infty$  trivialerweise (3.28) impliziert. Es sei daher angenommen, dass Variationen  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  existieren, für die (3.37) zutrifft. Diese werden im Folgenden ausschließlich betrachtet. Dabei ist es hinreichend, beliebige Teilfolgen  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  zu untersuchen, für die  $\delta^1 J_{T_i}^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  auch gegen  $-\infty$  strebt.

Folglich sei  $T_1, T_2, T_3, \dots$  eine beliebige streng monoton wachsende Sequenz mit  $T_1 > 0$ , sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta^1 J_{T_i}^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) = \lim_{i \rightarrow \infty} -\phi(T_i)^\top \delta \mathbf{x}(T_i) = -\infty \quad (3.38)$$

vorliegt. Weiterhin gilt für den vorliegenden Fall 3, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}(T_i)\|_2 = +\infty. \quad (3.39)$$

Es wird eine untere Schranke für die zweite Variation  $\delta^2 J_{T_i}^*(\delta \mathbf{u}(\cdot))$  bestimmt. Hierzu stellt man ähnlich zum Fall 2 ein optimales Regelungsproblem 2.1 für vorgegebene Endwerte aus Abschnitt 2.4.2, S. 43, auf:

$$\min_{\mathbf{u}_{T_i}(\cdot)} \delta^2 J_{0, T_i}^*(\mathbf{u}_{T_i}(\cdot)), \quad (3.40)$$

wobei  $\mathbf{u}_{T_i}(t): [0, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{x}_{T_i}(t): [0, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine zulässige Lösung der Dynamik (3.26) zu dem Anfangswert  $\mathbf{x}_{T_i}(0) = \delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  und dem vorgegebenen Endwert  $\mathbf{x}_{T_i}(T_i) = \delta \mathbf{x}(T_i)$  bilden. Wegen der vollständigen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit kann auch hier Satz 2.2 angewendet werden und die Existenz einer Lösung  $(\mathbf{x}_{T_i}^*(\cdot), \mathbf{u}_{T_i}^*(\cdot))$  ist garantiert. Aus Gl. (2.93) folgt für die minimalen Kosten die Ungleichung

$$\delta^2 J_{0, T_i}^*(\mathbf{u}_{T_i}^*(\cdot)) \geq \delta \mathbf{x}(T_i)^\top \hat{\mathbf{P}}_{T_i}(0) \delta \mathbf{x}(T_i). \quad (3.41)$$

Die symmetrische Matrix  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(0)$  ist positiv definit und wird bestimmt mittels der Lösung  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(t)$  der Riccatischen Matrixdifferentialgleichung (2.89) (für  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}$ ) auf dem Intervall  $[0, T_i]$  zum Endwert  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(T_i) = \mathbf{0}$ . Aus [110, Theorem 10] ist bekannt, dass  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(0)$  monoton wächst in dem Sinne, dass  $\hat{\mathbf{P}}_{T_i}(0) \succeq \hat{\mathbf{P}}_{T_j}(0) \succ \mathbf{0}$  für alle natürlichen Zahlen  $i \geq j \geq 1$  erfüllt ist. Auf dieser Basis konstruiert man die untere Schranke

$$\delta^2 J_{T_i}^*(\delta \mathbf{u}(\cdot)) \geq \delta \mathbf{x}(T_i)^\top \hat{\mathbf{P}}_{T_1}(0) \delta \mathbf{x}(T_i). \quad (3.42)$$

Aus (3.39) und (3.42) folgt, dass die untere Schranke der zweiten Variation als quadratische Funktion in  $\delta \mathbf{x}(T_i)$  gegen  $+\infty$  strebt. Dagegen strebt die erste Variation  $\delta^1 J_{T_i}^*(\cdot) = -\phi(T_i)^\top \delta \mathbf{x}(T_i)$  lediglich als lineare Funktion in  $\delta \mathbf{x}(T_i)$  gegen  $-\infty$ . Daraus folgt  $\liminf_{i \rightarrow \infty} \Delta J_{0, T_i}(\cdot) = +\infty$  trotz (3.38).

Da die Wahl der Sequenz  $T_1, T_2, \dots$ , für die die erste Variation  $\delta^1 J_{T_i}(\cdot)$  gegen  $-\infty$  strebt, völlig beliebig war, folgert man, dass  $\liminf_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0, T}(\cdot) = +\infty$  trotz (3.37) gilt. Somit ist die Ungleichung (3.28) erfüllt.

Falls keine vollständige Beobachtbarkeit vorliegt, sondern lediglich Annahme 3.2 zutrifft, verbleibt für die Fälle 2 und 3 die Ungleichung (3.28) nachzuweisen. Nach Abschnitt B.2 ist es immer möglich, das System (3.1) in ein vollständig beobachtbares Teilsystem mit dem Zustand  $\mathbf{x}_1(t)$  und in ein nicht beobachtbares mit dem Zustand  $\mathbf{x}_2(t)$  zu zerlegen, sodass

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}} \quad (3.43)$$

gilt. Für diese Zerlegung und die daraus resultierende Systemmatrix  $\mathbf{A}$  gemäß (B.4) folgt für die Dynamik des Kozustandes (3.9)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11}^\top & -\mathbf{A}_{21}^\top \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{22}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^\top \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1^* + (\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{x}}), \quad (3.44)$$

wobei der Kozustand  $\phi(\cdot)$  analog in  $\phi_1(\cdot)$  und  $\phi_2(\cdot)$  zerlegt wurde. Der Kozustand  $\phi_2(\cdot)$ , der dem nicht beobachtbaren Teilsystem zuzuordnen ist, muss demnach die autonome Dynamik  $\dot{\phi}_2 = -\mathbf{A}_{22}^\top \phi_2$  erfüllen. Dem Ansatz  $\phi = \mathbf{P}(\mathbf{x}^* - \Pi_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}) + \Pi_{\phi} \bar{\mathbf{x}}$  für den Kozustand in (3.17) aus Abschnitt 3.4.1 folgend muss

$$\phi_2(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^*(t) - \Pi_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}(t)) + \Pi_{\phi, 2} \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (3.45)$$

gelten, wobei  $\mathbf{P}$  und  $\Pi_{\phi}$  entsprechend der Unterteilung des Kozustandes partitioniert wurden. Begutachtet man die algebraische Riccatigleichung

(3.15) unter Berücksichtigung der Zerlegung, so ist ersichtlich, dass deren eindeutige Lösung  $\mathbf{P}_{21} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{P}_{22} = \mathbf{0}$  impliziert. Einsetzen von  $\phi_2(t) = \Pi_{\phi,2}\bar{\mathbf{x}}(t)$  in die autonome Dynamik von  $\dot{\phi}_2 = -\mathbf{A}_{22}^\top \phi_2$  führt zur Sylvestergleichung  $\Pi_{\phi,2}\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}_{22}^\top \Pi_{\phi,2}$ . Aufgrund der Annahme 3.2 zur Entdeckbarkeit ist  $\mathbf{A}_{22}$  eine Hurwitzmatrix. Somit haben die Matrizen  $-\mathbf{A}_{22}^\top$  und  $\bar{\mathbf{A}}$  infolge der Annahme 3.3 keine gemeinsamen Eigenwerte. Daher hat die Sylvestergleichung die eindeutige Lösung  $\Pi_{\phi,2} = \mathbf{0}$ , vgl. [30, Kap. 7.2]. Hieraus folgt  $\phi_2(t) \equiv \mathbf{0}$  für den Kandidaten  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ . Dementsprechend nimmt die Kostendifferenz die Form

$$\Delta J_{0,T}(\cdot) = -\phi_1(T)^\top \delta \mathbf{x}_1(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (\delta \mathbf{x}_1^\top \mathbf{C}_1^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \delta \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u}) dt \quad (3.46)$$

an. Weiterhin liefert die Zerlegung der Dynamik (3.26) der Variation

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \delta \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}. \quad (3.47)$$

Offensichtlich hat die Variation  $\delta \mathbf{x}_2$  des nicht beobachtbaren Teilsystems keinen Einfluss auf die Kostendifferenz und damit auch nicht auf die erste Variation  $\delta^1 J_T^*(\cdot)$ .<sup>10)</sup> Das Verhalten der ersten Variation  $\delta^1 J_T^*(\cdot)$  war aber ausschlaggebend bei der Untersuchung der Fälle 2 und 3. Diese Fälle müssen daher nur betrachtet werden, wenn  $\delta \mathbf{x}_1(\cdot)$  die gestellten Fallkriterien erfüllt. Dann ist es möglich, bei der Analyse der Fälle 2 und 3 lediglich die Dynamik von  $\delta \mathbf{x}_1$  zu berücksichtigen, sodass die dort erforderlichen Annahmen zur Beobachtbarkeit gewährleistet sind. Damit bleiben die Schlussfolgerungen der beiden Fälle erhalten.

Aus der Fallstudie zieht man den Schluss, dass die Bedingung (3.28) für jede nicht triviale Variation erfüllt ist, und daher  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  überholend optimal ist. Die Fallstudie hat neben den Annahmen lediglich die Beschränkung von  $\phi(t)$  vorausgesetzt. Da diese unter den getroffenen Annahmen für alle gegebenen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  nachgewiesen wurde, ist der selbe Schluss zur Bedingung (3.28) auch für alle gegebenen Anfangswerte möglich und der Satz ist bewiesen.  $\square$

Aus der Beweisführung geht nicht nur die überholende Optimalität von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  hervor, sondern sogar, dass der Parameter  $\epsilon > 0$  zur Bedingung (3.25) für gewisse Variationen beliebig groß gewählt werden kann.

<sup>10)</sup> Dies ist wenig verwunderlich, da  $\mathbf{x}_2$  keinen Einfluss auf die Kosten (3.3) hat, was nach Einsetzen von (3.43) und Zerlegung der Systemdynamik (3.1a) ersichtlich ist.

Dies betrifft alle Variationen, die den Fällen 2 und 3 zuzuordnen sind. Diese Fälle umfassen all jene Variationen, die für  $t \rightarrow \infty$  von dem stationären Verhalten der überholend optimalen Lösung abweichen. Es ist daher naheliegend, das stationäre Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{x}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{x}(\cdot))$  auf Optimalität gemäß der Definition 2.4, S. 20, zu untersuchen. Ausgehend von der Beweisführung von Satz 3.2 erhält man hierzu das folgende Korollar. Dieses wird unter der strengeren Annahme 3.4 zur vollständigen Beobachtbarkeit hergeleitet, um eine kompakte Beweisführung zu erlauben. Im Anschluss wird kurz diskutiert, dass es auch unter der schwächeren Annahme 3.2 zur Entdeckbarkeit seine Gültigkeit behält.

**Korollar 3.1** (Optimales stationäres Verhalten). *Die Annahmen 3.1, 3.3 und 3.4 seien erfüllt. Die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  sei die überholend optimale Lösung nach Satz 3.2 für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  sowie  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und ihr stationäres Verhalten sei gegeben durch  $(\Pi_x^* \bar{x}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{x}(\cdot))$  gemäß Satz 3.1. Für alle gegebenen  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  weist  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ein optimales stationäres Verhalten auf. Für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und jedes  $\mathbf{x}_0$  gilt insbesondere*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\cdot) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) \right) = +\infty \quad (3.48)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , falls

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 > 0. \quad (3.49)$$

*Beweis.* Aus den Fällen 2 und 3 der Fallunterscheidung im Beweis von Satz 3.2 geht für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  hervor, dass jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die die Bedingung

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 > 0 \quad (3.50)$$

erfüllt, auch  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\cdot) = +\infty$  erfüllt. Daher ist die Bedingung (2.16)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) = 0 \quad (3.51)$$

notwendig für eine beschränkte Kostendifferenz  $\Delta J_{0,T}(\cdot)$  für  $T \rightarrow \infty$ . Nach Definition 2.4 folgt daraus, dass für alle gegebenen Anfangswerte die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ein optimales stationäres Verhalten aufweist.

Die zweite Aussage des Korollars resultiert aus der Beobachtung, dass (3.49) gemeinsam mit Satz 3.1 die Bedingung (3.50) impliziert.  $\square$

**Bemerkung 3.6.** Das Korollar 3.1 kann auch unter der schwächeren Annahme 3.2 bewiesen werden. Hierzu berücksichtigt man die Zerlegung in ein vollständig beobachtbares Teilsystem mit dem Zustand  $\mathbf{x}_1$  und ein nicht beobachtbares Teilsystem mit dem Zustand  $\mathbf{x}_2$  wie im Beweis von Satz 3.2. Die Aussage des Korollar 3.1 wird nicht von der Fallstudie im Beweis von Satz 3.2 abgedeckt, wenn Variationen mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{0}$  und  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}_2(t)\|_2 > 0$  vorliegen – falls eine zulässige Lösung nur im stationären Verhalten des nicht beobachtbaren Teilsystems abweicht. Für diesen Fall wurde bisher nur  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\cdot) > 0$  gezeigt. Jedoch trifft dann ebenso  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\cdot) = \infty$  zu, da eine unbeschränkte Stellenergie  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u} dt = \infty$  benötigt wird, um  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{x}_2(t)\|_2 > 0$  zu erreichen, weil das nicht beobachtbare Teilsystem nach Annahme 3.2 asymptotisch stabil ist.

### 3.4.3 Analyse der Kosten der überholend optimalen Lösung

Es werden nun die Kosten der überholend optimalen Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  analysiert. Ermittelt man die Kosten des optimalen stationären Verhaltens  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  anhand des Kostenfunktional (3.3)

$$\bar{J}_{0,T}^*(\bar{\mathbf{x}}_0) := J_{0,T}(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)), \quad (3.52)$$

so erhält man

$$\bar{J}_{0,T}^*(\bar{\mathbf{x}}_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}^\top ((\mathbf{C} \Pi_x^* + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{C} \Pi_x^* + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}) + \mathbf{F}^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{F}^*) \bar{\mathbf{x}} dt. \quad (3.53)$$

Dann kann das Kostenfunktional (3.3), ähnlich wie in [167], in zwei Teile zerlegt werden:

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) = \tilde{J}_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) + \bar{J}_{0,T}^*(\bar{\mathbf{x}}_0). \quad (3.54)$$

Hierin erfasst  $\tilde{J}_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$  die Kosten der Transition vom Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  zur stationären Trajektorie  $\mathbf{x}_s^*(t) = \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$ . Diese Transition wird durch den in Abschnitt 3.4.1 eingeführten Fehler  $\tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  und die zugehörige Stellgröße

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = \mathbf{u}^*(t) - \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{K}^* \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.55)$$

beschrieben. Sie bilden zusammen die Lösung  $(\tilde{\mathbf{x}}^*(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot))$  der Fehlerdynamik (3.16).

Mithilfe der Variationsrechnung werden die Transitionskosten in Anhang D.1, S. 233, bestimmt. Daraus folgt, dass sie konvergieren:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{J}_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}_0)^\top \mathbf{P}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}_0)^\top \mathbf{\Pi}_\phi \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (3.56)$$

Es ist plausibel, dass der Grenzwert existiert, da die Fehlerdynamik (3.16) asymptotisch stabil ist und gleichzeitig der Zustand  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  wegen Annahme 3.3 beschränkt bleibt. Zu bemerken ist noch, dass dieser Grenzwert auch negativ sein kann.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die optimalen Kosten der überholend optimalen Lösung in Transitionskosten  $\tilde{J}_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$  und Kosten  $\bar{J}_{0,T}^*(\bar{\mathbf{x}}_0)$  für das stationäre Verhalten aufgeteilt werden können. Die Transitionskosten sind endlich, wohingegen die Kosten des stationären Verhaltens unbeschränkt sind. Damit sind diese alleine dafür verantwortlich, dass kein endlicher Grenzwert der optimalen Kosten existiert.

Auf Basis dieser Aufteilung der Kosten folgen einige Bemerkungen.

**Bemerkung 3.7.** Im Gegensatz zu [167] ist es hier gelungen, einen expliziten Term der Transitionskosten nicht nur für konstante Solltrajektorien sondern auch für zeitlich variierende Solltrajektorien und Störungen herzuleiten. Darüber hinaus liegen diese hier in einer aussagekräftigeren Form vor, was der Anwendung der Variationsrechnung und der neuen Entwurfs-gleichung (3.13) zuzuschreiben ist. So ist beispielsweise abzulesen, dass der Grenzwert der Transitionskosten  $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{J}_{t,T}^*(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{x}}(t))$  zum Zeitpunkt  $t$  auf den Zusammenhang

$$\phi(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{J}_{t,T}^*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (3.57)$$

für den Kozustand (3.17) der überholend optimalen Lösung führt. Unter Berücksichtigung der Diskussion in [39, Kap. 4.2] zum Zusammenhang zwischen dem Kozustand und den optimalen Kosten auf endlichen Horizonten, ist es daher nicht überraschend, dass

$$V(t, \mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{J}_{t,T}^*(\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{x}}(t)) \quad (3.58)$$

die HJB Gleichung (2.107) zum Endwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{x}) = 0$  löst.

**Bemerkung 3.8.** Es ist auch möglich ein *äquivalentes* optimales Folgeregelungsproblem zu  $\text{OFP}_\infty$  3.1 aufzustellen, indem das Kostenfunktional modifiziert wird:

$$\tilde{J}_{0,T}(x_0, \bar{x}_0, u(\cdot)) = J_{0,T}(x_0, \bar{x}_0, u(\cdot)) - \bar{J}_{0,T}^*(\bar{x}_0). \quad (3.59)$$

Dies bedeutet lediglich eine Verschiebung des Nullniveaus. Daher folgt wieder aus Satz 3.2, dass  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  eine überholend optimale Lösung ist. Da der Grenzwert (3.56) der Kosten existiert, ist damit nach Definition 2.3(i) eine eindeutige, stark optimale Lösung dieses äquivalenten Problems gefunden. Die modifizierten Kosten werden folglich über den unendlichen Horizont minimiert. Im Sinne von [167] wurde hier somit eine „rigorose Lösung“ des linear-quadratischen optimalen Folgeregelungsproblems sogar unter zeitlich variierenden Solltrajektorien und Störgrößen gefunden.

**Bemerkung 3.9.** Führt man die Matrix  $\Pi_\infty = \Pi_\phi - P\Pi_x^*$  ein, so ist der Grenzwert zum Zeitpunkt  $t$  analog zu (3.56) durch

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{J}_{t,T}^*(x(t), \bar{x}(t)) = \frac{1}{2}x^\top P x + x^\top \Pi_\infty \bar{x} - \bar{x}^\top \left( \frac{1}{2}\Pi_x^{*\top} P \Pi_x^* + \Pi_x^{*\top} \Pi_\infty \right) \bar{x} \quad (3.60)$$

gegeben. Die ersten beiden Summanden können auch durch

$$\frac{1}{2}x(t)^\top P x(t) + x(t)^\top v(t) \quad (3.61)$$

mit  $v(t) = \Pi_\infty \bar{x}(t)$  ausgedrückt werden. Sind die Solltrajektorien und die Störungen konstant, so ist  $v(t)$  ebenfalls konstant. Dann entspricht der Term (3.61) einem sogenannten Endkostenterm, der gelegentlich in der „Economic Model Predictive Control“ (EMPC)<sup>11)</sup> verwendet wird [3, Theorem 3], [5, Abschn. 4.1]. Im Umkehrschluss kommt der hier hergeleitete Term (3.61) als Endkostenterm für die EMPC in Frage, wenn im Gegensatz zu [3, 5] nicht ein zeitunabhängiger, sondern ein *zeitvarianter* Integrand des Kostenfunktional der EMPC vorliegt.

### 3.4.4 Unabhängige Vorgabe der Güte für die Transition und für das stationäre Verhalten

In der Praxis ist davon auszugehen, dass die Anforderungen an eine Regelung während der Transition und während des stationären Verhaltens unterschiedlich sind. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie auf einfache

<sup>11)</sup>Zu Deutsch: „ökonomische modellprädiktive Regelung“.



Weise unterschiedliche Gütefunktionale für diese beiden Phasen vorgegeben werden können und welche Optimalitätseigenschaften sichergestellt werden können.

Hierzu wird analog zu Abschnitt 2.6 das optimale Regelungsproblem für einen linear-quadratischen Regler betrachtet:

$$\min_{\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{x}}^{\top} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}^{\top} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}) dt \quad (3.62)$$

mit  $\tilde{\mathbf{Q}} \succeq \mathbf{0}$  und  $\tilde{\mathbf{R}} \succ \mathbf{0}$  sowie der Dynamik  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$ , dem Anfangswert  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0$  und der

**Annahme 3.5.** Es existiert ein  $\tilde{\mathbf{Q}}_{1/2}$  gegeben durch  $\tilde{\mathbf{Q}}_{1/2}^{\top} \tilde{\mathbf{Q}}_{1/2} = \tilde{\mathbf{Q}}$ , sodass das Paar  $(\tilde{\mathbf{Q}}_{1/2}, \mathbf{A})$  entdeckbar ist.

Wie bereits in Abschnitt 2.6 aufgezeigt, ist die optimale Lösung durch  $(\tilde{\mathbf{x}}^*(\cdot), -\tilde{\mathbf{K}}^* \tilde{\mathbf{x}}^*(\cdot))$  mit der Rückführmatrix  $\tilde{\mathbf{K}}^* = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^{\top} \tilde{\mathbf{P}}$  und der symmetrischen Lösung  $\tilde{\mathbf{P}} \succeq \mathbf{0}$  der algebraischen Riccatigleichung

$$\tilde{\mathbf{P}} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\top} \tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^{\top} \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

gegeben. Wählt man  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^{\top} \mathbf{Q} \mathbf{C}$  und  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ , so ist offensichtlich, dass die optimale Lösung genau der Lösung  $(\tilde{\mathbf{x}}^*(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot))$  der Fehlerdynamik (3.16) aus Abschnitt 3.4.1 entspricht. D. h., dass die überholend optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  nach Satz 3.2 das obige optimale Regelungsproblem als Teilproblem löst und in diesem Sinne eine optimale Transition aufweist.

Aus praktischer Sicht ist jedoch davon auszugehen, dass die Anforderungen an das stationäre Verhalten und an die Transition unterschiedlich, wenn nicht sogar widersprüchlich sind. Das optimale Folgeregelungsproblem OFP<sub>∞</sub>3.1 ist beispielsweise geeignet, um mit einem überaktuierten System einer Solltrajektorie möglichst exakt zu folgen und gleichzeitig die zusätzlichen Stellgrößen stationär effizient zu nutzen. Dann werden Diagonaleinträge von  $\mathbf{Q}$  verhältnismäßig größer sein als jene von  $\mathbf{R}$ . Für die Transition ist dann eine sehr schnelle Ausregelzeit zu erwarten, die mit einem unerwünscht hohen Stellenergiebedarf und infolge der Stellbegrenzungen ggf. sogar mit einer nicht implementierbaren Regelung einhergeht.

Nutzt man die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur des Kandidaten aus Satz 3.1 aus, so kann die Rückführmatrix  $\mathbf{K}^*$  durch  $\tilde{\mathbf{K}}^*$  ersetzt werden:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\tilde{\mathbf{K}}^* (\mathbf{x}^*(t) - \boldsymbol{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (3.64)$$

Eine geeignete Wahl der Matrizen  $\tilde{\mathbf{Q}}$  und  $\tilde{\mathbf{R}}$  erlaubt es, die gewünschten Anforderungen an die Transition zu erfüllen.

In vielen Fällen wird sich die Gewichtung  $\mathbf{R}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{R}}$  der Stellgrößen an den Stellbegrenzungen orientieren, vgl. [6, Kap. 6.3]. Dann empfiehlt sich die Wahl  $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}$ . Unter dieser Bedingung ist es möglich zu zeigen, dass der Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  mit dem Regelgesetz (3.64) tatsächlich ein geschlossen formulierbares optimales Folgeregelungsproblem löst. Dieses ist durch  $\text{OFP}_\infty 3.1$  gegeben, wenn man die Kosten (3.3) durch

$$\hat{J}_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = J_{0,T}(\cdot) + \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}})^\top (\tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}) (\mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}) dt \quad (3.65)$$

ersetzt, wobei  $\mathbf{\Pi}_x^*$  mittels der Sylvestergleichung (3.13) bestimmt wird. Führt man eine Herleitung dem Abschnitt 3.4.1 entsprechend durch, so erhält man als Entwurfsgleichungen die algebraische Riccatigleichung (3.63) und die Sylvestergleichung (3.13). Diese liefern eine eindeutige Lösung, falls neben den Annahmen 3.1, 3.2 und 3.5 auch die Eigenwertbedingung (3.18) sowohl für die Lösung  $\mathbf{P}$  von (3.15) als auch für die Lösung  $\tilde{\mathbf{P}}$  von (3.63) erfüllt ist. Die Eigenwertbedingung ist garantiert unter der Annahme 3.3 und die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  mit dem Regelgesetz (3.64) ist überholend optimal für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ .

Dass die Erweiterung der Kosten in (3.65) lediglich die Transition beeinflusst, war zu erwarten, da diese nur für eine Abweichung  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$  vom stationären Verhalten einen Einfluss hat.

Es ist jedoch möglich, dass die Wahl  $\tilde{\mathbf{R}} \neq \mathbf{R}$  erforderlich ist. Oder aber es wird, wie in Bemerkung 3.3 diskutiert, ein ggf. reduzierter Zustandsbeobachter oder ein Störgrößenbeobachter benötigt, um den Zustand  $\mathbf{x}(t)$  und  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  zu ermitteln und das Regelgesetz (3.64) bzw. (3.19) implementieren zu können. Diese können z. B. wie in [123] unter üblichen Voraussetzungen entworfen werden. Das folgende Ergebnis belegt, dass in diesen Fällen zumindest immer ein optimales stationäres Verhalten garantiert ist:

**Satz 3.3.** *Die Annahmen 3.1 bis 3.3 seien erfüllt und ein Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi)$ , das die Sylvestergleichung (3.13) löst, sowie  $\mathbf{F}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi$  seien gegeben. Für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sei  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  eine zulässige Lösung, für die  $M_x := M_x(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$ ,  $M_u := M_u(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  und  $\alpha > 0$  existieren, sodass*

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 &\leq M_x e^{-\alpha t}, \\ \|\hat{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 &\leq M_u e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (3.66)$$

erfüllt sind. Dann weist  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  ein optimales stationäres Verhalten bezüglich des Kostenfunktional (3.3) für alle Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  auf.

*Beweis.* Sei  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  nach Satz 3.2 gegeben und sei die Variation  $\delta\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*$  und  $\delta\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^*$  definiert. Für die Kostendifferenz (3.25) gilt

$$\Delta J_{0,T}(\delta\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \delta\hat{\mathbf{u}}(\cdot)) = -\phi(T)^\top \delta\hat{\mathbf{x}}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (\delta\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta\hat{\mathbf{x}} + \delta\hat{\mathbf{u}}^\top \mathbf{R} \delta\hat{\mathbf{u}}) dt \quad (3.67)$$

in Analogie zu der Gl. (3.27). Wegen Satz 3.1 und der Bedingung (3.66) konvergieren  $\|\delta\hat{\mathbf{x}}(t)\|_2$  und  $\|\delta\hat{\mathbf{u}}(t)\|_2$  exponentiell gegen null für  $t \rightarrow \infty$ . Da  $\|\phi(T)\|_2$  beschränkt ist, existiert ein endlicher Grenzwert  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{0,T}(\delta\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \delta\hat{\mathbf{u}}(\cdot)) \geq 0$ . Man betrachtet nun die Kostendifferenz  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  für eine beliebige zulässige Lösung, die die Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}$  nicht erfüllt. Wegen (3.66) und Satz 3.1 ist daher auch die Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) = \mathbf{0}$  nicht erfüllt und auf Basis des optimalen stationären Verhaltens von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  nach Korollar 3.1 bzw. der Bemerkung 3.6 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \hat{\mathbf{u}}(\cdot)) \right) = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - \Delta J_{0,T}(\delta\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \delta\hat{\mathbf{u}}(\cdot)) \right) = +\infty. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Damit weist  $(\hat{\mathbf{x}}(\cdot), \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  nach Definition 2.4 ein optimales stationäres Verhalten auf. Dies trifft für alle  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  zu, da die Erfüllung der Bedingung zu (3.66) für beliebige Anfangswerte vorausgesetzt wurde.  $\square$

### 3.4.5 Sonderfälle wie die Reduzierbarkeit auf einen linear-quadratischen Regler

Ein bekannter Sonderfall für ein optimales Folgeregelungsproblem wie OFP<sub>∞</sub>3.1 geht auf [13, Kap. 9-11] zurück. Dort wurde für SISO-Systeme mit vollem relativen Grad festgestellt, dass sowohl die optimale Stellgröße  $u^*$  als auch der Folgefehler  $y - \bar{y}$  gegen null konvergieren, falls die Solltrajektorie  $\bar{y}(t)$  eine Lösung der homogenen Dynamik des Systemausganges zu einem geeigneten Anfangswert ist. Der Grenzwert der optimalen Kosten (3.3) ist dann endlich für  $T \rightarrow \infty$  und das optimale Regelgesetz ist

durch einen linear-quadratischen Regler gegeben, der ein optimales Regelungsproblem 2.3 wie in Abschnitt 3.4.4 löst und zu einer optimalen Transition führt. Aus diesem Grund wird auch von der *Reduzierbarkeit* auf einen linear-quadratischen Regler gesprochen. Die genannte Bedingung aus [13] wurden auf SISO-Systeme mit invarianten Nullstellen und auf MIMO-Systeme erweitert [135], [136].

Wird die Solltrajektorie durch eine Dynamik wie (3.2a) beschrieben, dann ist es offensichtlich notwendig, wenn auch nicht hinreichend für die Reduzierbarkeit, dass der offene Regelkreis ein internes Modell von (3.2a) aufweist [6, Kap. 4]. Der Zusammenhang wird in einigen Quellen genutzt, wie z. B. [32, 47, 65, 93, 101, 164], um diesen Sonderfall durch Einführung eines internen Modells mittels einer Reglerdynamik mit virtueller Stellgröße herbeizuführen. Es wird dann ein optimales Folgeregelungsproblem aufgestellt, dessen Kostenfunktional den Fehler  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$  und die virtuelle Stellgröße berücksichtigt. Dessen Lösung bedingt jedoch lediglich eine optimale Transition, da die Kosten des stationären Verhaltens (3.53) unberücksichtigt bleiben. Gerade für überaktuierte Systeme ist das unbefriedigend. Für unteraktuierte Systeme ist es hingegen normalerweise unmöglich, diesen Sonderfall herbeizuführen, da  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{0}$  nicht umsetzbar ist.

Stattdessen sind hier prüfbare Bedingungen, wann tatsächlich der Sonderfall der Reduzierbarkeit für das Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  vorliegt, von Interesse. In [6, Kap. 4] und [106] werden als Bedingungen algebraische Gleichungen vorgestellt, deren Lösbarkeit notwendig und hinreichend ist. Die Überprüfung bedarf allerdings vorangehender Zustandstransformationen des Systems und des Exosystems. Durch die folgende Herleitung auf Basis der neuen Entwurfsgleichung (3.13):

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi}_x^* \\ \bar{\Pi}_\phi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_x^* \\ \Pi_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix}$$

wird gezeigt, dass es möglich ist, solche Transformationen zu vermeiden und eine leichter zu prüfende Bedingung zu finden. Auf einfache Weise werden zwei neue Sonderfälle angegeben, die bisher unberücksichtigt waren. Einer von diesen führt ebenfalls auf einen linear-quadratischen Regler.

Um bei der Analyse zusätzliche Spezialfälle zu vermeiden, werden hier wie in der Literatur Störungen nicht betrachtet, d. h.  $\mathbf{E}_d = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$ . Weiterhin sei  $(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{A}})$  vollständig beobachtbar und  $\bar{\mathbf{A}}$  besitze ausschließlich Eigenwerte mit nicht negativem Realteil, d. h.  $\sigma(\bar{\mathbf{A}}) \subset \mathbb{C}_0^+$ . Die Annah-

me 3.3 von S. 61 wird folglich nicht vorausgesetzt. Nach Abschnitt 3.4.1 ist das Regelgesetz eines Kandidaten zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  durch

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}^*(\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (3.69)$$

bestimmt. Damit die Stellgröße generell konvergiert  $\mathbf{u}^*(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , muss

$$\mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

vorliegen. Daraus geht der linear-quadratische Regler  $\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}^* \tilde{\mathbf{x}}^*(t)$  mit  $\tilde{\mathbf{x}}^* = \mathbf{x}^* - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}$  hervor, der durch die Lösung eines optimale Regelungsproblems, wie 2.3 in Abschnitt 2.6 auf S. 54, gegeben ist und eine optimale Transition bewirkt, wie in Abschnitt 3.4.4 diskutiert. Um auch die Konvergenz des Folgefehlers  $\mathbf{y}^* - \bar{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{0}$  zu garantieren, muss dieser für das stationäre Verhalten verschwinden:

$$\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

Hieraus resultiert die Forderung

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^*. \quad (3.72)$$

Berücksichtigt man diese, so folgt  $\mathbf{\Pi}_\phi \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \mathbf{\Pi}_\phi$  aus der zweiten Zeile der Sylvestergleichung (3.13). Um dies zu gewährleisten, wählt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathbf{\Pi}_\phi = \mathbf{0}$ , wodurch auch die Bedingung (3.70) garantiert ist. Es verbleiben somit lediglich die erste Zeile der Sylvestergleichung (3.13) und die Forderung (3.72), die gemeinsam eine notwendige und hinreichende Bedingung bilden:

$$\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x^*, \quad (3.73a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^*. \quad (3.73b)$$

Nur falls für diese eine Lösung  $\mathbf{\Pi}_x^*$  gefunden werden kann, ist die optimale Regelung zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  auf einen linear-quadratischen Regler reduzierbar. Dann ist nämlich die Lösung  $(\tilde{\mathbf{x}}(\cdot) + \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), -\mathbf{K}^* \tilde{\mathbf{x}}(\cdot))$  überholend optimal und das selbst, wenn die Annahme 3.3 verletzt wird. Im Allgemeinen wird die Annahme 3.3 benötigt, um die Beschränkung des Kozustandes  $\phi(t)$  zu gewährleisten, denn nur dann kann der Beweis von Satz 3.2 geführt werden. Für den vorliegenden Sonderfall ist der Kozustand jedoch durch  $\phi(t) = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^*(t)$  gegeben und wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{0}$  ohne zusätzliche Annahme beschränkt. Das Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  kann daher

in ein optimales Regelungsproblem 2.3 aus Abschnitt 2.6, S. 54, transformiert werden [6, 106], für das bekanntlich unter den Annahmen 3.1 und 3.2 immer eine eindeutige Lösung existiert.

Die neue Bedingung (3.73) erlaubt auch eine einfache Interpretation. Wie im Beweis von Satz 3.1 verwendet, hat eine Sylvestergleichung wie (3.73a) nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn  $\bar{\mathbf{A}}$  und  $\mathbf{A}$  gemeinsame Eigenwerte haben, vgl. [30, Kap. 7.2]. Dies tritt offener zutage, wenn man wie in [111] den Ansatz  $\mathbf{\Pi}_x^* = \mathbf{U}\mathbf{T}^{-1}$  mit  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times \bar{n}}$  wählt, wobei die Matrix  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{\bar{n} \times \bar{n}}$  die Systemmatrix des Exosystems in die Jordansche Normalform  $\bar{\mathbf{A}}_J = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$  transformiert. Aus (3.73) folgt dann

$$\mathbf{U}\bar{\mathbf{A}}_J = \mathbf{A}\mathbf{U}, \quad (3.74a)$$

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{U}. \quad (3.74b)$$

Aufgrund der vollständigen Beobachtbarkeit von  $(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{A}})$ , die die selbe Eigenschaft für  $(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}, \bar{\mathbf{A}}_J)$  impliziert, resultiert aus diesen Bedingungen, dass alle Jordanblöcke in  $\bar{\mathbf{A}}_J$  auch Jordanblöcke von  $\mathbf{A}$  sein müssen. Folglich muss die Dynamik des Exosystems vollständig als inneres Modell in der Dynamik des offenen Regelkreises enthalten sein. Die Bedingung (3.74b) stellt darüber hinaus sicher, dass dieses innere Modell am Systemausgang  $\mathbf{y}$  die Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  erzeugt.

Die Untersuchungen in der Literatur zur Reduzierbarkeit setzen immer die Konvergenz des Folgefehlers  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{0}$  voraus. Wird (3.72) nicht mehr gefordert aber zumindest (3.70), so folgt aus der Sylvestergleichung (3.13)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_x^* \\ \mathbf{\Pi}_\phi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_x^* \\ \mathbf{\Pi}_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{Q} \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad (3.75a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi. \quad (3.75b)$$

Findet man eine Lösung für diese Bedingung, dann liegt  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  wieder als linear-quadratischer Regler vor. Über die Optimalität dieser Lösung lässt sich an dieser Stelle keine Aussage treffen, da der Kozustand nicht mehr beschränkt ist. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass diese Lösung im Allgemeinen nicht überholend optimal sein wird. Außerdem sind die Kosten unbeschränkt.

Ein weiterer, möglicher Sonderfall ist durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_x^* \\ \mathbf{\Pi}_\phi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_x^* \\ \mathbf{\Pi}_\phi \end{bmatrix}, \quad (3.76a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{\Pi}_x^* \quad (3.76b)$$

festgelegt. Das resultierende Regelgesetz liegt zwar nicht unbedingt als linear-quadratischer Regler vor, aber es führt zu einer exakten Folgeregelung  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{0}$ . Interessant ist dieser Fall, wenn  $\bar{\mathbf{A}}$  Eigenwerte mit positivem Realteil hat. Im Gegensatz zum Vorherigen muss hier nicht zwingend die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  diese Eigenwerte durch ein inneres Modell aufweisen. Stattdessen können diese auch in  $-\mathbf{A}$  vorhanden sein, unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte steuerbar sind. Der Kozustand ist in diesem Sonderfall erneut nicht beschränkt und Optimalität daher nicht zu erwarten. Vorteilhafte Eigenschaften kann der Regler dennoch besitzen, was im Abschnitt 3.5 erörtert wird.

### 3.4.6 Unbeschränkte Soll- oder Störgrößen

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, dass man die Existenz einer Lösung des Problems  $\text{OFP}_{\infty} 3.1$  ohne die Annahme 3.3 nicht erwarten kann, wenn der Sonderfall zur Reduzierbarkeit auf einen linear-quadratischen Regler in Abschnitt 3.4.5 außer Acht gelassen wird. Die Annahme 3.3 ist für alle unbeschränkten Solltrajektorien oder Störgrößen verletzt, insbesondere für nichtkonstante Polynome oder exponentiell anwachsende Signale. Dies motiviert das Gegenbeispiel aus der Veröffentlichung [21]:

**Gegenbeispiel 3.1.** Es sei das System

$$\dot{x} = x - u \quad (3.77)$$

gegeben. Der Ausgang  $y = x$  soll der Solltrajektorie  $\bar{y} = \bar{x}_1$  folgen, die durch das Exosystem

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad (3.78)$$

zum Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0^T = [0 \ 0 \ 1]$  generiert wird. Die Solltrajektorie ist ein Polynom zweiter Ordnung  $\bar{y}(t) = t^2/2$  und ist offensichtlich unbeschränkt. Die Annahme 3.3 ist folglich nicht erfüllt, was auch daraus hervorgeht, dass der Eigenwert  $\bar{\lambda} = 0$  der Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  des Exosystems eine algebraische Vielfachheit gleich drei hat, aber eine geometrische Vielfachheit von lediglich eins. Die Lösung von (3.78) lautet  $\bar{\mathbf{x}}(t)^T = [t^2/2 \ t \ 1]$ . Es wird das Problem  $\text{OFP}_{\infty} 3.1$  mit den Kosten

$$J_{0,T}(\cdot, u(\cdot)) = \int_0^T \left( \left( x - \frac{t^2}{2} \right)^2 + u^2 \right) dt \quad (3.79)$$

betrachtet. Aus der Herleitung eines Kandidaten in Abschnitt 3.4.1, der die notwendigen Optimalitätsbedingungen in Satz 2.3 erfüllt, folgt, dass dieser für  $t \rightarrow \infty$  immer gegen ein stationäres Verhalten  $(\Pi_x \bar{x}(\cdot), \mathbf{F} \bar{x}(\cdot))$  konvergieren muss. Es wird gemäß (3.13) durch eine Bedingung der Form

$$\Pi_x \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x + \mathbf{B} \mathbf{F} \quad (3.80)$$

an  $\Pi_x = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3]$  und  $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ f_3]$  mit  $\pi_i, f_i \in \mathbb{R}$  eingeschränkt. Für das vorliegende Problem führt dies zu

$$\Pi_x = [f_1 \ f_1 + f_2 \ f_1 + f_2 + f_3]. \quad (3.81)$$

Der Kandidat liegt dann in einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, wie in Abbildung 3.3 in Abschnitt 3.4.1 dargestellt, vor. Für jeden beliebigen Anfangswert  $x_0$  kann ein solcher Ansatz durch  $(\tilde{x}(\cdot) + \Pi_x \bar{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot) + \mathbf{F} \bar{x}(\cdot))$  dargestellt werden, wobei die Fehler  $\tilde{x}(t)$  und  $\tilde{u}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell gegen null konvergieren. Letzteres ist unabhängig von der Wahl von  $(\Pi_x, \mathbf{F})$  möglich, da das System vollständig steuerbar ist. Setzt man den Ansatz in das Kostenfunktional ein, dann resultiert

$$\begin{aligned} J_{0,T}(\cdot, \tilde{u}(\cdot) + \mathbf{F} \bar{x}(\cdot)) &= \int_0^T \left( \tilde{x}^2 + 2\tilde{x}(\Pi_x \bar{x} - \frac{t^2}{2}) + 2\tilde{u} \mathbf{F} \bar{x} + \tilde{u}^2 \right) dt \\ &\quad + \int_0^T \left( (\Pi_x \bar{x} - \frac{t^2}{2})^2 + (\mathbf{F} \bar{x})^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Das erste Integral erfasst die Kosten der Transition vom Anfangswert  $x_0$  zum gewünschten stationären Verhalten. Diese sind für jede beliebige Wahl von  $(\Pi_x, \mathbf{F})$  beschränkt. Das zweite Integral erfasst die Kosten des stationären Verhaltens  $(\Pi_x \bar{x}(\cdot), \mathbf{F} \bar{x}(\cdot))$  und wird berechnet zu

$$\begin{aligned} J_{0,T}(\Pi_x \bar{x}_0, \bar{x}_0, \mathbf{F} \bar{x}(\cdot)) &= ((\pi_1 - 1)^2 + f_1^2) \frac{T^5}{20} + ((\pi_1 - 1)\pi_2 + f_1 f_2) \frac{T^4}{4} \\ &\quad + ((\pi_1 - 1)\pi_3 + \pi_2^2 + f_1 f_3 + f_2^2) \frac{T^3}{3} + (\pi_2 \pi_3 + f_2 f_3) T^2 + (\pi_3^2 + f_3^2) T. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Da die Transitionskosten in jedem Fall beschränkt sind, überwiegen die Kosten des stationären Verhaltens für hinreichend große  $T > 0$ . Diese müssen demnach für das stationäre Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{x}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{x}(\cdot))$  einer überholend optimalen Lösung langsamer anwachsen als für jedes andere



$(\Pi_x \bar{x}(\cdot), F\bar{x}(\cdot))$ . Die Kosten liegen als Polynom in  $T$  vor. Daher müssen offensichtlich  $F^*$  und  $\Pi_x^*$  der Gleichung (3.81) entsprechend so gewählt werden, dass die Koeffizienten der Potenzen von  $T$  minimal sind. Hierbei muss mit der Minimierung der höchsten Potenz von  $T$ , diese ist hier gleich fünf, begonnen werden. Danach folgt die Minimierung des Koeffizienten der nächstniedrigeren Potenzen bis schrittweise alle Koeffizienten minimiert wurden. Nur falls dies gelingt, kann eine überholend optimale Lösung existieren.

Unter Berücksichtigung von (3.81) führt die eindeutige Wahl  $f_1^* = 0,5$  zu einem globalen Minimum des Koeffizienten von  $T^5$ . Der Koeffizient von  $T^4$  ist dann unabhängig von  $f_2$  und  $f_3$ , wohingegen der Koeffizient von  $T^3$  für die eindeutige Wahl  $f_2^* = -0,125$  ein globales Minimum annimmt. Bestimmt man nun den Koeffizienten von  $T^2$ , so erhält man

$$\pi_2\pi_3 + f_2f_3 = \frac{9}{64} + \frac{1}{4}f_3. \quad (3.84)$$

Dieser Koeffizient besitzt kein Minimum. Zu jedem beliebigen  $f_3^*$  wird daher eine Wahl  $f_3 < f_3^*$  zu langsamer anwachsenden Kosten (3.83) für hinreichend große  $T$  führen. Daraus folgt, dass keine überholend optimale Lösung zum vorliegenden Problem existiert. Dies ist darüber hinaus für beliebige  $\bar{x}_0^\top = [0 \quad 0 \quad \bar{x}_{3,0}]$  mit  $\bar{x}_{3,0} \neq 0$  der Fall.

Vergleichbare Gegenbeispiele können auch für exponentiell wachsende Solltrajektorien oder Störgrößen konstruiert werden. Daraus schließt man, dass die Existenz einer Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  nicht zu erwarten ist, falls die Annahme 3.3 durch unbeschränkte Solltrajektorien oder Störgrößen verletzt wird. Aus diesem Grund wird in den folgenden Abschnitten untersucht, welche vorteilhaften Eigenschaften jenseits der Optimalität ein Kandidat aus Abschnitt 3.4.1 in solchen Fällen aufweist.

### 3.4.7 Fazit

Aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen über unendliche Horizonte können algebraische Entwurfsgleichungen bestimmt werden. Mit diesen lässt sich unter sinnvollen Voraussetzungen immer ein eindeutiger Kandidat zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  berechnen. Gilt die Annahme 3.3, die beschränkte Soll- und Störgrößen garantiert, dann ist dieser überholend optimal und weist ein optimales stationäres Verhalten auf. Letzteres trifft auch zu, falls die Implementierung von Zustands- oder Störgrößenbeobachtern nötig ist. Ist die Annahme 3.3 nicht erfüllt und treten unbeschränkte Soll- oder Störgrößen auf, so existiert in der Regel keine überholend optimale

Lösung, wenn nicht der Sonderfall der Reduzierbarkeit auf einen linear-quadratischen Regler vorliegt.

## 3.5 Zusammenhang mit Lösungen über endliche Horizonte

Dieser Abschnitt widmet sich der Relation zwischen den Lösungen des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 über endliche Horizonte und dem Kandidaten über einen unendlichen Horizont aus Satz 3.1. Im Fokus steht der Zusammenhang durch die Grenzwertbildung  $T \rightarrow \infty$ . Die daraus ableitbaren Eigenschaften geben Aufschluss darüber, ob eine zufriedenstellende Güte des Kandidaten auch über endliche Horizonte zu erwarten ist. Dies ist insbesondere für unbeschränkte Soll- und Störgrößen von Interesse, für die im Allgemeinen keine überholend optimale Lösung über einen unendlichen Horizont existiert. Es werden die in Abschnitt 3.2 erläuterten Beiträge B4) zur Grenzwertbildung, B5) zur Turnpike und Turnpike-Eigenschaft sowie B6) zum Agreeable Plan aufeinanderfolgend präsentiert.

### 3.5.1 Der Grenzwert der Lösungen über endliche Horizonte

In diesem Abschnitt wird bewiesen, dass der Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  einer Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub>3.1 unter den Annahmen des Satzes 3.1 zum Reglerentwurf dem Grenzwert der Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 für  $T \rightarrow \infty$  entspricht. Die Ergebnisse aus der Veröffentlichung [22] werden hier ausführlich hergeleitet. Dabei werden übliche Techniken wie z. B. in [118, 152] angewendet.

Die optimale Folgeregelung

$$\mathbf{u}_T^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top(\mathbf{P}_T(t)\mathbf{x}_T^*(t) + \mathbf{\Pi}_T(t)\bar{\mathbf{x}}(t)) \quad (3.85)$$

zum Problem OFP<sub>T</sub>3.1 wurde in Satz 2.1 in Abschnitt 2.4.1 hergeleitet. Diese weist die gleiche Struktur wie die Folgeregelung  $\mathbf{u}^*(t)$  in (3.19) aus Satz 3.1 auf, wenn man letztere umformt zu

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top(\mathbf{P}\mathbf{x}^*(t) + (-\mathbf{P}\mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{\Pi}_\phi)\bar{\mathbf{x}}(t)). \quad (3.86)$$

Im Lemma 2.1 in Abschnitt 2.6 wurde nach [40] bereits der Zusammenhang von der Lösung  $\mathbf{P}_T(t)$  der Riccatischen Matrixdifferentialgleichung

mit der Lösung  $\mathbf{P}$  der algebraischen Riccatigleichung durch eine Ungleichung (2.121) erfasst. Das folgende erste Teilergebnis erfasst quantitativ den Zusammenhang zwischen jeweils dem zweiten Teil der Regelgesetze, nämlich von  $\mathbf{\Pi}_T(t)$  zu den Matrizen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{\Pi}_x^*$  und  $\mathbf{\Pi}_\phi$ .

**Lemma 3.1.** *Es seien die Annahmen 3.1 und 3.2 erfüllt. Für ein beliebiges  $T > 0$  seien die symmetrische und positiv semidefinite Matrix  $\mathbf{P}_T(t)$  als Lösung der Riccatischen Matrixdifferenzialgleichung (2.78) zum Endwert  $\mathbf{P}_T(T) = \mathbf{0}$  sowie die Lösung  $\mathbf{\Pi}_T(t)$  zur Matrixdifferenzialgleichung (2.79) zum Endwert  $\mathbf{\Pi}_T(T) = \mathbf{0}$  definiert. Weiterhin seien eine eindeutige Lösung der Sylvestergleichung (3.13) durch das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi)$  und eine positiv semidefinite, symmetrische Lösung  $\mathbf{P}$  der algebraischen Riccatigleichung (3.15) gegeben. Zudem seien  $\alpha, \bar{\alpha} > 0$  und  $M_{\text{cl}}, \bar{M} > 0$  so gewählt, dass die Transitionsmatrizen des mit  $\mathbf{u}^*(t)$  geschlossenen Regelkreises und des Exosystems die Ungleichungen*

$$\|e^{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P})t}\|_2 \leq M_{\text{cl}}e^{-\alpha t}, \quad (3.87a)$$

$$\|e^{\bar{\mathbf{A}}t}\|_2 \leq \bar{M}e^{\bar{\alpha}t} \quad (3.87b)$$

für alle  $t \geq 0$  erfüllen.<sup>12)</sup> Auf dem Intervall  $[t_0, T]$  mit  $t_0 \geq 0$  sei die Transitionsmatrix  $\Phi_T(t, t_0)$  des zeitvarianten geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{z}}_T = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}_T(t))\mathbf{z}_T \quad (3.88)$$

mit  $\Phi_T(t_0, t_0) = \mathbf{I}$  definiert. Für ein  $\widetilde{M}_\Phi > 0$  und jedes  $T > 0$  gilt

$$\|\Phi_T(t, t_0) - e^{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P})(t-t_0)}\|_2 \leq \widetilde{M}_\Phi e^{-2\alpha(T-t)} \quad (3.89)$$

für jedes beliebige  $t_0 \in [0, T]$  und  $t \in [t_0, T]$ . Außerdem existiert ein  $\widetilde{M}_\Pi > 0$ , sodass für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  die Ungleichung

$$\|(\mathbf{\Pi}_T(t) - \mathbf{\Pi}_\infty)\bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq \widetilde{M}_\Pi e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (3.90)$$

mit  $\mathbf{\Pi}_\infty = \mathbf{\Pi}_\phi - \mathbf{P}\mathbf{\Pi}_x^*$  für jedes  $T > 0$  und jedes  $t \in [0, T]$  erfüllt wird.

*Beweis.* Der Beweis wird in Anhang D.2, ab S. 234, durchgeführt.  $\square$

Das optimale Regelgesetz  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  in (3.85) liegt im Gegensatz zu  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  nicht in einer vorteilhaften Zwei-Freiheitsgrade-Struktur vor. Daher wurde  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  der Struktur von  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  zuvor in (3.86) angepasst. Wie bereits in

<sup>12)</sup>Dies ist immer möglich, da  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}$  nach Satz 3.1 eine Hurwitzmatrix ist.

Bemerkung 3.9 konnte dann die Matrix  $\mathbf{\Pi}_\infty$  eingeführt werden. In beispielsweise [107] und der Veröffentlichung [22] ist eine direkte Entwurfsgleichung (D.19) für  $\mathbf{\Pi}_\infty$  angegeben. Diese ist durch die Grenzwertbildung  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{\Pi}_T(t) = \mathbf{\Pi}_\infty$  für jedes  $t \in [0, \infty)$ , die aus (3.90) für  $\alpha > \bar{\alpha}$  abgeleitet werden kann, motiviert. Die an  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  angepasste Reglerstruktur von  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  in [107] hat allerdings den Nachteil, dass für sie Methoden wie in Abschnitt 3.4.4 nicht umgesetzt werden können.

Mithilfe von Lemma 3.1 ist es nun möglich im folgenden Satz einen direkten quantitativen Zusammenhang von  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  zu  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  in Abhängigkeit der Länge des Horizontes  $T$  herzuleiten. Aus diesem Zusammenhang geht eine Eigenwertbedingung hervor, unter der  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  den Grenzwert zu  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  für  $T \rightarrow \infty$  darstellt.

**Satz 3.4.** *Die Annahmen 3.1 und 3.2 seien erfüllt. Für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  seien die optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  gemäß Satz 2.1, S. 41, und ein Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  nach Satz 3.1, S. 71, der eindeutig sei, gegeben. Man wähle  $\alpha, \bar{\alpha} > 0$  gemäß den Bedingungen (3.87a) und (3.87b) in Lemma 3.1. Für alle  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  existieren dann  $M_x := M_x(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  und  $M_u := M_u(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$ , sodass*

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 \leq M_x e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T}, \quad (3.91a)$$

$$\|\mathbf{u}_T^*(t) - \mathbf{u}^*(t)\|_2 \leq M_u e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \quad (3.91b)$$

für jedes  $T > 0$  und alle  $t \in [0, T]$  erfüllt werden. Es seien die Eigenwertbedingungen

$$\Re\{\lambda\} + \Re\{\bar{\lambda}\} < 0 \quad (3.92)$$

und  $\Re\{\bar{\lambda}\} \geq 0$  für alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  und alle  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})$  mit der positiv semidefiniten, symmetrischen Lösung  $\mathbf{P}$  der algebraischen Riccatigleichung (3.15) erfüllt. Dann ist die Existenz des eindeutigen Kandidaten  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  garantiert. Für alle  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sowie jedes gegebene  $t \in [0, \infty)$  ist  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  der Grenzwert der optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t))$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)) = \mathbf{0}, \quad (3.93a)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_T^*(t) - \mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0}. \quad (3.93b)$$

*Beweis.* Der Beweis wird in Anhang D.3, ab S. 237, präsentiert.  $\square$

Dieser Satz stellt einen quantitativen Zusammenhang der Lösung des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  mit dem Kandidaten einer Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  dar. Dieser quantitative Zusammenhang ist für die Herleitungen der nächsten Abschnitte von Bedeutung. Er geht über Ergebnisse aus der genannten Literatur hinaus, die lediglich die Konvergenz der Reglerkoeffizienten berücksichtigen [6, 107, 118] oder nur Fälle, in denen  $\bar{\alpha} = 0$  gewählt werden kann, zulassen [11, 13, 117, 118, 152]. Der Satz 3.4 unterstreicht die Wichtigkeit der Eigenwertbedingung (3.92) für die Konvergenz (3.93). Tatsächlich ist diese Bedingung im Allgemeinen auch notwendig, da andernfalls  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{\Pi}_T(t) = \mathbf{\Pi}_\infty$  nicht mehr zutrifft, vgl. [107].

Wachsen die Solltrajektorien oder Störungen nur als Polynom in der Zeit oder sind sie sogar beschränkt, dann wird die Eigenwertbedingung (3.92) immer erfüllt. Folglich ist unter der Annahme 3.3 die optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  nach Satz 3.2 auch immer ein Grenzwert der optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  für  $T \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 3.10.** Aus dem Zusammenhang über eine Grenzwertbildung wird in der Literatur auf inadäquate Weise auf eine Optimalitätseigenschaft geschlossen, wie z.B. in [6, Kap. 4] oder [55]. Selbst wenn die Eigenwertbedingung (3.92) und damit die Konvergenz (3.93) gewährleistet ist, ist der Schluss, dass die Kostendifferenz ebenfalls für  $T \rightarrow \infty$  gegen null konvergieren würde, unzulässig. Dies wird nun unter Annahme 3.3 kurz aufgezeigt. Auf Basis der Variationsrechnung in Abschnitt 2.3.2 gilt

$$J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) = \frac{1}{2} \delta^2 J_T^*(\delta \mathbf{u}_T(\cdot)) \geq \frac{1}{2} \int_0^T \delta \mathbf{u}_T^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u}_T dt \quad (3.94)$$

für die Variation  $\delta \mathbf{u}_T(t) = \mathbf{u}^*(t) - \mathbf{u}_T^*(t)$ . Sie verschwindet nicht zum Ende des Intervalls  $[0, T]$ , vielmehr resultiert  $\delta \mathbf{u}_T(T) = \mathbf{u}^*(T)$  wegen  $\mathbf{u}_T^*(T) = \mathbf{0}$  aufgrund der Transversalitätsbedingung  $\phi_T(T) = \mathbf{0}$  in (2.52c). Außer in Sonderfällen, wie in Abschnitt 3.4.5, konvergiert  $\mathbf{u}^*(T)$  nicht gegen den Nullvektor für  $T \rightarrow \infty$ . Zusätzlich ist es mittels Lemma 3.1 und Satz 3.4 nachzuvollziehen, dass die Ableitung  $\frac{d}{dt} \|\delta \mathbf{u}_T(t)\|_2$  beschränkt ist und die Schranke unabhängig von  $T$  gewählt werden kann.<sup>13)</sup> Damit besitzt das

<sup>13)</sup>Um dies nachzuvollziehen, bietet es sich an, die Differentiation unter Verwendung der Differenzialgleichungen (2.78), (2.79), (2.75), (3.1a) und (3.2a) durchzuführen. Danach kann eine Abschätzung der oberen Schranke mithilfe der Ungleichungen aus Lemma 3.1 und Satz 3.4 sowie deren Beweisen erfolgen.

Integral auf der rechten Seite von (3.94) für beliebig große und geeignet gewählte  $T > 0$  eine feste untere, positive Schranke und die Kostendifferenz kann nicht gegen null konvergieren.

Offensichtlich liegt ein Fall vor, indem die Grenzwertbildung nicht mit der Integration vertauscht werden darf. Im Gegensatz zu Abschnitt 2.6 sind aufgrund der nicht verschwindenden Abweichung der Kosten hier keine Rückschlüsse aus der Konvergenz (3.92) auf Optimalitätseigenschaften möglich. Solche getroffenen Rückschlüsse, wie beispielsweise in [6, 55, 56, 130], sind daher im Allgemeinen inadäquat.

**Bemerkung 3.11.** Mit Blick auf Abschnitt 3.3, werden die Unzulänglichkeiten in der Beweisführung zur überholenden Optimalität von [152, Theorem 3.1] kurz diskutiert. Im finalen Schritt [152, Gl. (3.12)] wird fälschlicherweise angenommen, dass *am Ende* des Horizontes  $[0, T]$  die Abweichung der Trajektorie  $\mathbf{x}_T^*(T)$  einer Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 von der Trajektorie  $\mathbf{x}^*(T)$  zum Problem OFP<sub>∞</sub>3.1 mit  $T \rightarrow \infty$  verschwindet. Dies gilt im Allgemeinen jedoch nicht:  $\mathbf{x}_T^*(T) - \mathbf{x}^*(T) \not\rightarrow \mathbf{0}$  für  $T \rightarrow \infty$ , was auch bereits die Ungleichung (3.91a) vermuten lässt. Das Ergebnis (3.93a) ist auch nicht anwendbar, da in (3.93a)  $t \in [0, \infty)$  ein gegebener fester Parameter ist, während hier  $t = T$  mit  $T \rightarrow \infty$  zunimmt.

Wie in Bemerkung 3.10 analysiert, konvergiert das optimale Regelgesetz zum Problem OFP<sub>T</sub>3.1:  $\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{u}_T^*(t) = \mathbf{0}$  für jedes  $T > 0$ . Der zugehörige geschlossene Regelkreis verhält sich somit am Ende eines Horizontes wie der offene Regelkreis. Ganz im Gegensatz dazu wird das Verhalten von  $\mathbf{x}^*(t)$  mit zunehmendem  $T$  durch das Exosystem bestimmt werden. Für z. B. konstante Soll- und Störgrößen kann es vorkommen, dass  $\mathbf{x}^*(t)$  mit  $t \rightarrow T$  in die Umgebung eines konstanten Punktes im Zustandsraum konvergiert, wohingegen  $\mathbf{x}_T^*(t)$  zum Ursprung strebt. Die falsche Annahme in [152] geht auf eine inadäquate Schlussfolgerung aus der Beweisführung zum [152, Lemma 3.2] und auf eine fehlerhafte Ungleichung im Rahmen von [152, Gl. (3.5)] zurück.

Schlussendlich würde die Beweisführung von [152, Theorem 3.1] implizieren, dass die Kostendifferenz  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  für  $T \rightarrow \infty$  gegen null konvergieren würde, was in Bemerkung 3.10 widerlegt wurde.

### 3.5.2 Konstruktion einer Turnpike und Nachweis einer Turnpike-Eigenschaft

Aus den hergeleiteten Zusammenhängen im vorherigen Abschnitt können nun Eigenschaften von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  abgeleitet werden. Hier wird nach-

gewiesen, dass eine Turnpike<sup>14)</sup> des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  durch das stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  der in Satz 3.2 hergeleiteten Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  gegeben ist. Die damit verbundenen Eigenschaften werden erörtert und insbesondere die wichtige Rolle der Annahme 3.3 aufgezeigt.

Der folgende Satz belegt, dass eine Turnpike selbst im Falle nichtperiodischer Solltrajektorien und Störgrößen explizit konstruiert werden kann.

**Satz 3.5** (Turnpike). *Die Annahmen 3.1, 3.2 und 3.3 seien erfüllt. Das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi)$  sei die eindeutige Lösung der Sylvestergleichung (3.13). Für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist dann  $\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  eine Turnpike des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$ . D. h., für jedes beliebige  $\epsilon > 0$  existieren Konstanten  $T_1(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \epsilon) > 0$  und  $T_2(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \epsilon) > 0$ , sodass für die in Satz 2.1 hergeleitete optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  zu jedem hinreichend langen Horizont  $[0, T]$  mit  $T \geq T_1 + T_2$  gilt:*

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq \epsilon, \quad \forall t \in [T_1, T - T_2]. \quad (3.95)$$

*Beweis.* Es wird nachgewiesen, dass die gesuchten positiven Konstanten  $T_1$  und  $T_2$  immer gefunden werden können. Infolge der Annahmen kann dazu Satz 3.4 genutzt werden, wobei die Wahl  $\bar{\alpha} = 0$  in (3.87b) wegen der Annahme 3.3 eines beschränkten Zustandes  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  des Exosystems möglich ist.

Es sei an die Superposition  $\mathbf{x}^*(t) = \tilde{\mathbf{x}}^*(t) + \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  nach Abschnitt 3.4.1 erinnert. Hierbei löst  $\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$  die Fehlerdynamik (3.16). Damit ist für ein  $\widetilde{M}_x := \widetilde{M}_x(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  die Ungleichung

$$\|\tilde{\mathbf{x}}^*(t)\|_2 \leq \widetilde{M}_x e^{-\alpha t} \quad (3.96)$$

erfüllt, wobei  $\alpha > 0$  gemäß (3.87a) gewählt wurde. Weiterhin gelten

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 \geq \|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 - \|\tilde{\mathbf{x}}^*(t)\|_2 \quad (3.97)$$

und

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 \leq M_x e^{-\alpha(T-t)} \quad (3.98)$$

mit  $M_x = M_x(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  wegen (3.91a) und  $\bar{\alpha} = 0$ . Führt man diese Ungleichungen zusammen, dann wird (3.95) erfüllt, falls die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq M_x e^{-\alpha(T-t)} + \widetilde{M}_x e^{-\alpha t} \leq \epsilon \quad (3.99)$$

<sup>14)</sup> Siehe Definition 2.6 in Abschnitt 2.2.2, S. 23.

gewährleistet ist. Für beliebige  $T_1, T_2 > 0$  und jedes  $T \geq T_1 + T_2$  ist dann

$$\bar{\epsilon} := M_x e^{-\alpha T_2} + \widetilde{M}_x e^{-\alpha T_1} \geq M_x e^{-\alpha(T-t)} + \widetilde{M}_x e^{-\alpha t} \quad (3.100)$$

sofort für jedes  $t \in [T_1, T - T_2]$  ersichtlich. Werden  $T_1$  und  $T_2$  hinreichend groß gewählt, sodass  $\bar{\epsilon} \leq \epsilon$  gilt, dann ist (3.99) wegen (3.100) offensichtlich erfüllt.  $\square$

Der nächste Satz zeigt eine Turnpike-Eigenschaft für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die die optimale Lösung des Problems  $\text{OFP}_{T3.1}$  approximiert. Umso geringer deren Kosten von den minimalen Kosten der optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  abweichen, umso näher wird  $\mathbf{x}(\cdot)$  an der Turnpike  $\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  verlaufen. Der Satz wird zwecks einer kompakten Herleitung für die strengere Annahme 3.4 zur Beobachtbarkeit formuliert.

**Satz 3.6.** *Die Annahmen 3.1, 3.3 und 3.4 seien erfüllt und das Paar  $(\Pi_x^*, \Pi_\phi)$  löse eindeutig die Sylvestergleichung (3.13). Es seien zwei Konstanten  $\Delta > 0$  und  $\epsilon > 0$  gegeben. Für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  seien  $T_1(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \epsilon) > 0$  und  $T_2(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \epsilon) > 0$  wie in Satz 3.5 gewählt. Es sei ein beliebiges  $T \geq T_1 + T_2$  gegeben. Dann existiert ein  $M_J(T_1, T_2) > 0$ , sodass für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_T(\cdot), \mathbf{u}_T(\cdot))$  auf dem Intervall  $[0, T]$ , deren Kostendifferenz die Ungleichung*

$$\Delta J_{0,T}(\cdot) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \leq \Delta^2 \quad (3.101)$$

*mit der optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_{T3.1}$  erfüllt, die folgende Ungleichung gilt:*

$$\|\mathbf{x}_T(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq \epsilon + M_J \Delta, \quad \forall t \in [T_1, T - T_2]. \quad (3.102)$$

*Beweis.* Der Beweis ist in Anhang D.4 gegeben.  $\square$

Das diesem Satz zugrundeliegende Ergebnis erweitert [173, Theorem 2.5] im linear-quadratischen Fall auf nichtperiodische Solltrajektorien und Störungen. Darüber hinaus ist es als eine Erweiterung von [171, Theorem 7.1.3] auf beliebige zulässige Lösungen, statt nur schwach überholende optimale Lösungen, sowie auf eine explizite Turnpike aufzufassen.

Für die Herleitung der beiden Sätze 3.5 und 3.6 wurde angenommen, dass die Solltrajektorien und die Störungen beschränkt sind. Eine solche Voraussetzung ist Standard in der Literatur, vgl. [154, 171, 173]. Durch die zugehörige Annahme 3.3 war es möglich, in (3.87b)  $\bar{\alpha} = 0$  zu wählen und somit die Ungleichung zur Abweichung  $\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2$  (3.91a)



in (3.98) im Beweis von Satz 3.5 zu überführen. Darin konnte dann noch  $e^{\alpha(T-t)}$  mittels  $e^{\alpha T_2}$  abgeschätzt werden. Diese Schritte haben es erlaubt, die Abweichung zur Turnpike  $\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2$  mittels (3.100) unabhängig von der Länge des Horizontes  $T$  auszudrücken. Daher konnte  $T_1$  aber insbesondere auch  $T_2$  unabhängig von jedem hinreichend langen  $T$  gewählt werden, um die Bedingung (3.95) zu erfüllen. Nach Abschnitt 2.2.2 stellt eine solche Wahl von  $T_1, T_2$  unabhängig von  $T$  ein elementares Merkmal einer Turnpike dar.

Als ein weiterer Beitrag dieses Abschnittes wird aufgezeigt, dass im Allgemeinen keine Turnpike existieren wird, falls Annahme 3.3 nicht mehr zutrifft und unbeschränkte Soll- oder Störgrößen auftreten. Dann muss nämlich  $\bar{\alpha} > 0$  gemäß (3.87b) gewählt werden und die zuvor beschriebenen Schritte führen zu der Abschätzung

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq M_x e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} + \widetilde{M}_x e^{-\alpha t} \leq M_x e^{-\alpha T_2} e^{\bar{\alpha} T} + \widetilde{M}_x e^{-\alpha T_1} \quad (3.103)$$

für jedes  $t \in [T_1, T - T_2]$ . Damit diese obere Schranke unterhalb einer vorgegebenen Konstante bleibt, muss offensichtlich  $T_2$  als Funktion der Länge des Horizontes  $T$  gewählt werden. Dies suggeriert, dass das oben genannte Merkmal einer Turnpike nicht vorliegt. Prinzipiell erscheint es noch möglich, dass die obere Abschätzung (3.91a) von  $\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2$  in diesem Szenario zu konservativ und daher nicht mehr hinreichend für den Nachweis einer Turnpike ist. Daher wird mittels eines Gegenbeispiels aufgezeigt, dass bereits für eine Solltrajektorie, die eine lineare Funktion der Zeit ist, keine Turnpike existiert.

**Gegenbeispiel 3.2.** Aus Abschnitt 2.2.2 wird das Beispiel 2.2, S. 25, mit der Solltrajektorie des Beispiels 2.3, S. 28, betrachtet. D. h., das Gütefunktional

$$J_{0,T}(0, 1, u(\cdot)) = \int_0^T 4(x - \bar{y})^2 + u^2 dt \quad (3.104)$$

wird durch die Wahl von  $u_T(\cdot)$  auf dem Intervall  $[0, T]$  unter Berücksichtigung der Dynamik  $\dot{x} = -x + u$  mit dem Anfangswert  $x_0 = 0$  minimiert. Die Annahmen 3.1 und 3.2 sind erfüllt. Die Solltrajektorie ist eine lineare Funktion der Zeit  $\bar{y}(t) = 10 + t$ . Diese wird durch das Exosystem

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad (3.105)$$

mit dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0^\top = [10 \ 1]$  mittels  $\bar{\mathbf{y}} = [1 \ 0] \bar{\mathbf{x}}$  generiert. Die Lösung des Exosystems ist durch  $\bar{\mathbf{x}}(t)^\top = [10 + t \ 1]$  gegeben.

Da die Systemmatrix des Exosystems einen doppelten Eigenwert in null mit geometrischer Vielfachheit gleich eins besitzt, wird zwar die Annahme 3.3 nicht erfüllt, aber die Eigenwertbedingung (3.18) wird zwingend eingehalten. Daher hat die Sylvestergleichung (3.13) nach Satz 3.1 eine eindeutige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi)$ . Für diese erhält man die Geradengleichung

$$\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t) = [0,8 \ 0] \bar{\mathbf{x}}(t) = 8 + 0,8 \cdot t. \quad (3.106)$$

Für die eindeutige optimale Lösung  $(x_T^*(\cdot), u_T^*(\cdot))$  des gestellten Problems über den endlichen Horizont  $[0, T]$  folgt aus (3.103), dass die Ungleichung

$$\|x_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq M_x e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} + \widetilde{M}_x e^{-\alpha t} \quad (3.107)$$

mit konstanten  $M_x, \widetilde{M}_x > 0$  gilt. Aufgrund des Eigenwertes  $\lambda \approx -2,236$  des geschlossenen Regelkreises muss der positive Parameter  $\alpha$  kleiner gleich 2,236 gewählt werden, um die Bedingung (3.87a) zu erfüllen. Es ist ersichtlich, dass ein beliebig kleines  $\bar{\alpha} > 0$  bestimmt werden kann, um (3.87b) und  $\alpha > \bar{\alpha}$  einzuhalten. Auf Basis von (3.107) ist für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes gegebene  $t \geq T_1$ , wobei  $T_1 > 0$  hinreichend groß gewählt sei, die Ungleichung

$$\|x_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq \epsilon \quad (3.108)$$

für alle hinreichend großen  $T$  erfüllt. Infolgedessen ist  $\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  der einzige mögliche Kandidat für eine Turnpike nach Definition 2.6, S. 23.

Neben einer analytischen Betrachtung, die in Anhang D.5 präsentiert wird, belegt eine Simulation, dass die Bedingung (3.108) nur dann auf einem Intervall  $t \in [T_1, T - T_2]$  für einen hinreichend langen Horizont  $[0, T]$  erfüllt wird, wenn  $T_2$  mit  $T$  anwächst.

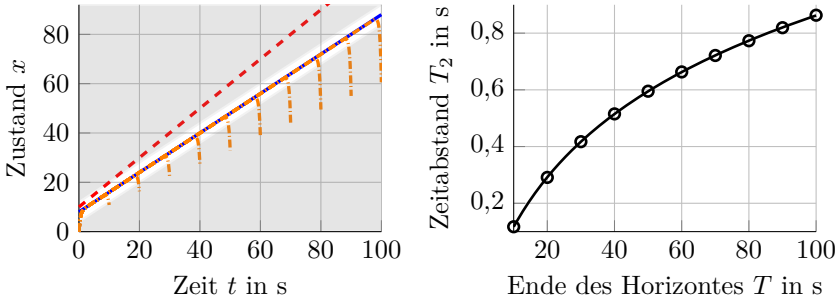
Abbildung 3.4 zeigt links die Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  (—), die Zustände  $x_T^*(t)$  (---) der mittels Satz 2.1, S. 41, bestimmten, eindeutigen optimalen Lösungen über die Horizonte  $[0, T]$  mit den Längen

$$T \in \{10 \text{ s}; 20 \text{ s}; \dots; 90 \text{ s}; 100 \text{ s}\}, \quad (3.109)$$

den Kandidaten für eine Turnpike  $\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  (—) sowie die Umgebung

$$U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)| \leq \epsilon\} \quad (3.110)$$

für  $\epsilon = 4$  (≡). Auf der rechten Seite sind die Zeitabstände  $T_{2,i}$  über den Enden  $T$  der Horizonte aufgetragen (●), für die der optimale Zustand  $x_T^*(T - T_2)$  die Umgebung  $U_{\epsilon=4}$  verlässt.



**Abbildung 3.4:** Darstellung von  $\Pi_x^* \bar{x}(t)$  (—), der Solltrajektorie (---) und der optimalen Lösungen (---) über verschiedene endliche Horizonte zum Beispiel 3.2.

In allen Fällen kann für den Zeitpunkt des Eintrittes in die Umgebung  $U_{\epsilon=4}$  das gleiche  $T_1 = 0,311$  s gewählt werden, wohingegen der Zeitabstand  $T_{2,i}$  offensichtlich mit  $T$  zunehmen muss. Der Zusammenhang wird durch

$$T_2 \approx -1,236 + 0,446 \cdot \ln(T + 10,807) \quad (3.111)$$

approximiert,<sup>15)</sup> was als Graph (—) auf der rechten Seite von Abbildung 3.4 eingezeichnet ist. Diese Approximation extrapoliert auch sehr präzise für  $T > 100$  s. Da  $T_2$  wächst, ohne zu konvergieren, erfüllt der einzige mögliche Kandidat  $\Pi_x^* \bar{x}(t)$  einer Turnpike für  $\epsilon = 4$  nicht die Anforderungen der Definition 2.6. Da diese Anforderungen für jedes beliebige  $\epsilon > 0$  eingehalten werden müssen, existiert folglich keine Turnpike für das gestellte Problem. Diese Beobachtung wird in Anhang D.5 auch auf analytischem Wege begründet.

<sup>15)</sup> Ausgehend von der Tatsache, dass man im vorliegend Fall  $\|\bar{x}(t)\|_2$  durch eine Geradengleichung anstelle von  $\bar{M} e^{\alpha t} \|\bar{x}_0\|_2$  abschätzen kann, bietet sich

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \Pi_x^* \bar{x}(t)\|_2 \leq M_x e^{-\alpha(T-t)} (\bar{M}_1 T + \bar{M}_2)$$

als obere Schranke alternativ zu (3.107) an, wobei der zweite Summand in (3.107) für ein hinreichend großes  $t$  vernachlässigbar ist. Für ein gegebenes  $\epsilon > 0$  muss dann  $T_2$  so bestimmt werden, dass die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}_T^*(T - T_2) - \Pi_x^* \bar{x}(T - T_2)\|_2 \leq M_x e^{-\alpha T_2} (\bar{M}_1 T + \bar{M}_2) \leq \epsilon$$

erfüllt wird. Dies lässt vermuten, dass  $T_2$  logarithmisch von  $T$  abhängt. Anhand dieser Überlegung wurde eine Ansatzfunktion gemäß (3.111) gewählt. Deren Koeffizienten wurden mittels nichtlinearer Regression für das vorliegende Beispiel bestimmt. Abbildung 3.4 belegt, dass hierdurch der Zusammenhang von  $T_2$  zu  $T$  präzise beschrieben wird.

Zusammengefasst kann festgehalten werden, dass im Allgemeinen die Existenz einer Turnpike nicht zu erwarten ist, falls unbeschränkte Solltrajektorien oder Störgrößen auftreten und demnach die Annahme 3.3 nicht erfüllt ist. Weiterführend wäre es interessant zu untersuchen, ob es eine Turnpike für die beiden Sonderfälle aus Abschnitt 3.4.5 gibt, für die zumindest eine überholende optimale Lösung existiert.

### 3.5.3 Agreeable Plan ohne Annahme 3.3

Die Gegenbeispiele 3.1 und 3.2 haben belegt, dass im Allgemeinen weder eine überholend optimale Lösung noch eine Turnpike existieren wird, falls die Solltrajektorien und die Störungen nicht beschränkt sind und somit Annahme 3.3, S. 61, verletzt wird. Falls aber wenigstens die Eigenwertbedingung (3.92) erfüllt ist, dann wird in diesem Abschnitt bewiesen, dass der Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  für das Problem  $\text{OFP}_\infty$  3.1 ein Agreeable Plan<sup>16)</sup> zum Problem  $\text{OFP}_T$  3.1 ist. Dies ist eine wertvolle Erkenntnis, wenn man nach Bemerkung 3.1, S. 72, berücksichtigt, dass die Eigenwertbedingung (3.92) als Voraussetzung für eine sinnvolle Trajektorienfolgeregelung anzusehen ist. Die Ergebnisse gehen von der Veröffentlichung [22] aus.

Zunächst wird gezeigt, dass die Konvergenz aus Satz 3.4, S. 97, auf endlichen Intervallen gleichmäßig erfolgt.

**Lemma 3.2.** *Die Annahmen 3.1 und 3.2 seien erfüllt und für alle Eigenwerte des Exosystems  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  gelte  $\Re\{\bar{\lambda}\} \geq 0$ . Weiterhin treffe die Eigenwertbedingung (3.92) zu. Für jedes  $\mathbf{x}_0$  und jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sowie jedes gegebene  $t_1 > 0$  ist dann die Konvergenz (3.93)*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)) = \mathbf{0}, \quad (3.112a)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_T^*(t) - \mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0} \quad (3.112b)$$

*gleichmäßig auf dem Intervall  $t \in [0, t_1]$ .*

*Beweis.* Das Ergebnis kann aus den Ungleichungen (3.91a) bzw. (3.91b) für beliebige  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  abgeleitet werden. Die *gleichmäßige Konvergenz* ist durch die folgende Aussage definiert [177, Abschn. 16.1.3]:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \hat{T} > 0: \quad \forall T > \hat{T}: \quad \|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 < \epsilon, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.113)$$

Aus (3.91a) folgt sofort, dass

$$\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)\|_2 \leq M_x e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \leq M_x e^{\alpha t_1} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \quad (3.114)$$

<sup>16)</sup>Siehe Definition 2.7 in Abschnitt 2.2.2, S. 26.

für alle  $t \in [0, t_1]$  gilt, wobei  $\alpha, \bar{\alpha} > 0$  nach Lemma 3.1 gewählt sind. Für

$$\frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}} \left( \alpha t_1 + \ln \left( \frac{M_{\bar{x}}}{\epsilon} \right) \right) \leq \hat{T} \quad (3.115)$$

erhält man  $M_x e^{\alpha t_1} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} < \epsilon$  für alle  $T > \hat{T}$  und die Aussage (3.113) trifft zu. Dass die Konvergenz (3.112b) gleichmäßig ist, kann völlig analog bewiesen werden.  $\square$

Der Nachweis eines Agreeable Plan ist das zweite Hauptresultat dieser Arbeit.

**Satz 3.7** (Agreeable Plan). *Es seien die Annahmen 3.1 und 3.2 aus Abschnitt 3.1 erfüllt und für alle Eigenwerte des Exosystems  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  treffe  $\Re\{\bar{\lambda}\} \geq 0$  zu. Es sei die Eigenwertbedingung*

$$\Re\{\lambda\} + \Re\{\bar{\lambda}\} < 0 \quad (3.116)$$

*für alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  und alle  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})$  mit der positiv semidefiniten, symmetrischen Lösung  $\mathbf{P}$  der algebraischen Riccatigleichung (3.15) erfüllt. Für beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  sei die zulässige, eindeutige Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  gemäß Satz 3.1, S. 71, bestimmt. Für alle gegebenen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ein Agreeable Plan zum Problem OFP<sub>T</sub>3.1 gemäß Definition 2.7, S. 26.*

*Beweis.* Zu beliebigen Anfangswerten  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ , einem beliebigen  $T_{\text{AP}} > 0$  sowie jedem  $T > T_{\text{AP}}$  sei  $(\mathbf{x}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot), \mathbf{u}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot))$  die Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>3.1, S. 61, auf dem Intervall  $[T_{\text{AP}}, T]$  zu den Anfangswerten  $\mathbf{x}(T_{\text{AP}}) = \mathbf{x}^*(T_{\text{AP}})$  und  $\bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}})$ . Weiterhin sei  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  die eindeutige Lösung des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 auf dem Intervall  $[0, T]$ . Beide Lösungen sind durch Satz 2.1, S. 41, bestimmt. Die Voraussetzungen für einen Agreeable Plan nach Definition 2.7 sind erfüllt, falls die Bedingung (2.25)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0,T_{\text{AP}}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) + J_{T_{\text{AP}},T}(\mathbf{x}^*(T_{\text{AP}}), \bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}}), \mathbf{u}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \right) = 0 \quad (3.117)$$

für jedes gegebene  $T_{\text{AP}} > 0$  eingehalten wird.

Es sei  $L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{x}}(t))$  der Integrand des Kostenfunktional (3.3) zum Zeitpunkt  $t$  wie in Abschnitt 2.3.2. Mit den Abweichungen definiert durch  $\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t) := \mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)$  und  $\tilde{\mathbf{u}}_T^*(t) := \mathbf{u}_T^*(t) - \mathbf{u}^*(t)$  gilt für die Differenz

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{x}}(t)) - L(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t), \bar{\mathbf{x}}(t)) = & -\frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{x}}_T^{*\top} \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_T^* \right. \\ & \left. + 2\tilde{\mathbf{x}}_T^{*\top} \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} (\mathbf{C}\mathbf{x}^* + (\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}) + 2\tilde{\mathbf{u}}_T^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{u}^* + \tilde{\mathbf{u}}_T^{*\top} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}_T^* \right) \end{aligned} \quad (3.118)$$

für jedes  $t \in [0, T]$ . Auf Basis von Lemma 3.2 ist bekannt, dass für jedes  $T_{\text{AP}} > 0$  die Abweichungen  $\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t)$  und  $\tilde{\mathbf{u}}_T^*(t)$  auf dem Teilintervall  $[0, T_{\text{AP}}]$  für  $T \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen den Nullvektor konvergieren. Da außerdem  $\|\mathbf{x}^*(t)\|_2$ ,  $\|\mathbf{u}^*(t)\|_2$  und  $\|\bar{\mathbf{x}}(t)\|_2$  auf diesem Intervall  $[0, T_{\text{AP}}]$  beschränkt sind, konvergiert damit auch die Differenz (3.118) auf  $[0, T_{\text{AP}}]$  gleichmäßig gegen null für  $T \rightarrow \infty$ . Nach [177, Abschn. 16.3.4] ist es somit möglich, die Grenzwertbildung und Integration auf  $[0, T_{\text{AP}}]$  zu vertauschen, sodass für die Kostendifferenz

$$\Delta J_{0, T_{\text{AP}}}(\cdot) = J_{0, T_{\text{AP}}}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0, T_{\text{AP}}}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \quad (3.119)$$

folgt

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{0, T_{\text{AP}}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0, T_{\text{AP}}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \right) = \\ \int_0^{T_{\text{AP}}} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( L(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{x}}(t)) - L(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t), \bar{\mathbf{x}}(t)) \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.120)$$

für jedes  $T_{\text{AP}} > 0$ . Es verbleibt für jedes  $T_{\text{AP}} > 0$  zu überprüfen, ob auch

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( J_{T_{\text{AP}}, T}(\mathbf{x}^*(T_{\text{AP}}), \bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}}), \mathbf{u}_{T_{\text{AP}}, T}^*(\cdot)) \right. \\ \left. - J_{T_{\text{AP}}, T}(\mathbf{x}_T^*(T_{\text{AP}}), \bar{\mathbf{x}}(T_{\text{AP}}), \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.121)$$

zutrifft. Mittels der Variationsrechnung in Abschnitt 2.3 setzt sich für die mögliche Wahl  $\epsilon = 1$ , vgl. S. 38, die Kostendifferenz

$$\Delta J_{T_{\text{AP}}, T}^*(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) = \delta^1 J_{T_{\text{AP}}, T}^*(\cdot) + \frac{1}{2} \delta^2 J_{T_{\text{AP}}, T}^*(\cdot) \quad (3.122)$$

aus der ersten Variation  $\delta^1 J_{T_{\text{AP}}, T}^*(\cdot) = \phi_T(T_{\text{AP}})^\top \delta \mathbf{x}(T_{\text{AP}})$  analog zu (2.48) und der zweiten Variation

$$\delta^2 J_{T_{\text{AP}}, T}^*(\cdot) = \int_{T_{\text{AP}}}^T (\delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u}) dt \quad (3.123)$$

nach (2.73) zusammen. Hierin sind  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{T_{AP},T}^* - \mathbf{x}_T^*$  und  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{T_{AP},T}^* - \mathbf{u}_T^*$ . Die Variation  $(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot))$  erfüllt die Dynamik  $\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}$  zum Anfangswert  $\delta \mathbf{x}(T_{AP}) = \mathbf{x}^*(T_{AP}) - \mathbf{x}_T^*(T_{AP})$ . Aus der Ungleichung (D.42), S. 240, lässt sich mittels  $\alpha > \bar{\alpha}$  ableiten, dass für den Kozustand  $\|\phi_T(T_{AP})\|_2 \leq \widehat{M}_\phi e^{\bar{\alpha} T_{AP}}$  für jedes beliebige  $T_{AP} > 0$  und jedes  $T > T_{AP}$  gilt. Mithilfe der Ungleichung (3.91a) schließt man dann auf die Ungleichung

$$|\delta^1 J_{T_{AP},T}^*(\cdot)| \leq M_{\delta^1} e^{(\alpha + \bar{\alpha}) T_{AP}} e^{-(\alpha - \bar{\alpha}) T} \quad (3.124)$$

mit  $M_{\delta^1} := M_{\delta^1}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  für die erste Variation. Nun wird eine obere Schranke der zweiten Variation bestimmt. Hierzu berücksichtigt man, dass sowohl  $\mathbf{u}_{T_{AP},T}^*(\cdot)$  als auch  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  durch (2.80) nach Satz 2.1 und somit durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{T_{AP},T}^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{P}_T(t) \mathbf{x}_{T_{AP},T}^*(t) + \mathbf{\Pi}_T(t) \bar{\mathbf{x}}(t)), \\ \mathbf{u}_T^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{P}_T(t) \mathbf{x}_T^*(t) + \mathbf{\Pi}_T(t) \bar{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned} \quad (3.125)$$

bestimmt sind. Daher erhält man

$$\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{T_{AP},T}^*(t) - \mathbf{u}_T^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}_T(t) \delta \mathbf{x}(t). \quad (3.126)$$

Offensichtlich ist  $\delta \mathbf{u}(\cdot)$  der linear-quadratische Regler zur Problemstellung

$$\min_{\delta \mathbf{u}(\cdot)} \delta^2 J_{T_{AP},T}^*(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)), \quad (3.127)$$

die analog zum Problem 2.4 in Abschnitt 2.6, S. 56, formuliert ist. Die zweite Variation kann folglich gemäß Abschnitt 2.6 durch

$$\begin{aligned} \delta^2 J_{T_{AP},T}^*(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) &= \delta \mathbf{x}(T_{AP})^\top \mathbf{P}_T(T_{AP}) \delta \mathbf{x}(T_{AP}) \\ &= (\mathbf{x}^*(T_{AP}) - \mathbf{x}_T^*(T_{AP}))^\top \mathbf{P}_T(T_{AP}) (\mathbf{x}^*(T_{AP}) - \mathbf{x}_T^*(T_{AP})) \end{aligned} \quad (3.128)$$

berechnet werden. Aus dem Beweis zu Satz 3.4 in Anhang D.3 ist bekannt, dass  $\|\mathbf{P}_T(t)\|_2 \leq M_P$  für jedes  $T > 0$  und alle  $t \in [0, T]$  gilt. Berücksichtigt man wieder (3.91a), so führt dies auf die Ungleichung

$$|\delta^2 J_{T_{AP},T}^*(\cdot)| \leq M_{\delta^2} e^{2\alpha T_{AP}} e^{-2(\alpha - \bar{\alpha}) T} \quad (3.129)$$

mit  $M_{\delta^2} := M_{\delta^2}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  für die zweite Variation. Aus den gefundenen Ungleichungen (3.124) und (3.129) resultiert

$$|\delta J_{T_{AP},T}^*(\cdot)| \leq M_{\delta^1} e^{(\alpha + \bar{\alpha}) T_{AP}} e^{-(\alpha - \bar{\alpha}) T} + \frac{M_{\delta^2}}{2} e^{2\alpha T_{AP}} e^{-2(\alpha - \bar{\alpha}) T} \quad (3.130)$$

für die Kostendifferenz (3.122). Wie im Beweis zu Satz 3.4 in Anhang D.3 gezeigt wurde, kann  $\alpha > \bar{\alpha}$  aufgrund der Eigenwertbedingungen gewählt werden. Es ergibt sich  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta J_{T_{AP}, T}^*(\cdot) = 0$  aus (3.130) für jedes  $T_{AP} > 0$ . Damit ist auch (3.121) belegt und zusammen mit (3.120) ist die Bedingung (3.117) für einen Agreeable Plan erfüllt.  $\square$

Nach der Definition 2.7, S. 26, ist gezeigt worden, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  und jedem  $T_{AP} > 0$  ein  $\hat{T} \geq 0$  gibt, sodass die Kostendifferenz

$$\Delta J_{0, T}^{AP}(\cdot) := \Delta J_{0, T_{AP}}(\cdot) + \Delta J_{T_{AP}, T}^*(\cdot) \quad (3.131)$$

für alle  $T \geq \hat{T}$  die Ungleichung  $\Delta J_{0, T}^{AP}(\cdot) \leq \epsilon$  erfüllt. Diese setzt sich durch das Umschalten von  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  zu  $\mathbf{u}_{T_{AP}, T}^*(\cdot)$  zum Zeitpunkt  $t = T_{AP}$  additiv aus  $\Delta J_{0, T_{AP}}(\cdot)$  aus (3.119) und  $\Delta J_{T_{AP}, T}^*(\cdot)$  aus (3.122) zusammen.

Aus praktischen Gesichtspunkten ist es von Interesse, in Abhängigkeit der Länge des Horizontes  $T$  abzuschätzen, zu welchem Zeitpunkt  $T_{AP}$  bzw. mit welchem Zeitabstand  $T - T_{AP}$  zum Ende des Horizontes von  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  zu  $\mathbf{u}_{T_{AP}, T}^*(\cdot)$  umgeschaltet werden muss, um  $\Delta J_{0, T}^{AP}(\cdot) \leq \epsilon$  zu gewährleisten. Hierzu wird eine obere Schranke von  $|\Delta J_{0, T}^{AP}(\cdot)|$  benötigt. Dazu bestimmt man mittels der Variationsrechnung die Kostendifferenz

$$\begin{aligned} \Delta J_{0, T_{AP}}(\cdot) &= J_{0, T_{AP}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0, T_{AP}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_{AP}} (\delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{u}) dt \end{aligned} \quad (3.132)$$

mit  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_T^*$  und  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_T^*$ . Für diese kann ohne Weiteres mithilfe der Ungleichungen (3.91) im Satz 3.4 eine obere Schranke

$$\Delta J_{0, T_{AP}}(\cdot) \leq M_J e^{2\alpha T_{AP}} e^{-2(\alpha - \bar{\alpha})T} \quad (3.133)$$

für ein  $M_J := M_J(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$  angegeben werden, wobei  $\alpha, \bar{\alpha} > 0$  gemäß Lemma 3.1 zu wählen sind. Für  $\Delta J_{T_{AP}, T}^*(\cdot)$  ist bereits die obere Schranke (3.130) bekannt. Für alle  $T \geq T_{AP} > 0$  ist es möglich, festzustellen, dass

$$e^{2\alpha T_{AP}} e^{-2(\alpha - \bar{\alpha})T} \leq e^{(\alpha + \bar{\alpha})T_{AP}} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \quad (3.134)$$

erfüllt ist. Insgesamt führt dies zu der Ungleichung

$$\Delta J_{0, T}^{AP}(\cdot) \leq M_J^{AP} e^{(\alpha + \bar{\alpha})T_{AP}} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \quad (3.135)$$



für ein  $M_J^{\text{AP}} := M_J^{\text{AP}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$ . Kann der Zeitabstand  $T - T_{\text{AP}}$  unter der Bedingung  $T \geq T_{\text{AP}} > 0$  entsprechend der Ungleichung

$$T - T_{\text{AP}} \geq \frac{2\bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}} T + \frac{1}{\alpha + \bar{\alpha}} \ln \left( \frac{M_J^{\text{AP}}}{\epsilon} \right) \quad (3.136)$$

gewählt werden, so wird  $\Delta_{0,T}^{\text{AP}} J(\cdot) \leq \epsilon$  durch (3.135) impliziert. Offensichtlich spielt hierbei das Verhältnis von  $\bar{\alpha}$  zu  $\alpha$ , das dem Verhältnis der größten Zeitkonstanten des geschlossenen Regelkreises zur kleinsten Zeitkonstanten des Exosystems entspricht, eine entscheidende Rolle. Ist beispielsweise Annahme 3.3 erfüllt, so ist die Wahl  $\bar{\alpha} = 0$  möglich. Der Zeitabstand  $T - T_{\text{AP}}$  kann dann unabhängig von der Länge des Horizontes  $T$  angegeben werden. Dieser ist hier als Pendant zum Zeitabstand  $T_2$  für eine Turnpike in Abschnitt 3.5.2 bzw. Definition 2.6 aufzufassen. Unter Annahme 3.3 können folglich beide unabhängig von  $T$  gewählt werden.

Für unbeschränkte Solltrajektorien oder Störungen ist aus Abschnitt 3.5.2 bekannt, dass  $T_2$  im Allgemeinen mit  $T$  anwachsen muss und eine Turnpike dann nicht existieren kann. Da nun  $\bar{\alpha} > 0$  zu wählen ist, muss auch  $T - T_{\text{AP}}$  mit  $T$  anwachsen. Allerdings ist die Existenz des Agreeable Plan gewährleistet, solange  $\alpha > \bar{\alpha}$  zutrifft, was äquivalent zur Eigenwertbedingung (3.116) ist. Dann ist die Steigung  $2\bar{\alpha}/(\alpha + \bar{\alpha})$  in (3.136) kleiner als eins. Darüber hinaus lässt sich aus (3.136) ablesen, dass  $T - T_{\text{AP}}$  umso langsamer mit  $T$  anwachsen kann desto größer  $\alpha$  gegenüber  $\bar{\alpha}$  ist. Je kleiner die größte Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises gegenüber der kleinsten Zeitkonstante des Exosystems ist, desto länger kann der Agreeable Plan  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  für ein wachsendes  $T$  implementiert werden und desto später kann man zu  $\mathbf{u}_{T_{\text{AP}}, T}^*(\cdot)$  umschalten.

Abschließend wird das Beispiel 2.3 aus Abschnitt 2.2.2, S. 28, wie schon im Gegenbeispiel 3.2 in Abschnitt 3.5.2, aufgegriffen.

**Beispiel 3.1.** Mittels Satz 3.1 wird die zulässige Lösung

$$(x^*(t), u^*(t)) = \left( 8 + 0,8t - 8e^{-2,236t}, -1,236(x^*(t) - (8 + 0,8t)) + 8,8 + 0,8t \right) \quad (3.137)$$

bestimmt. Wie bereits im Gegenbeispiel 3.2 erläutert, ist der einfache Eigenwert des geschlossenen Regelkreises  $\lambda = -2,236$  und daher kann  $\alpha = 2,236$  gewählt werden. Da die Solltrajektorie lediglich ein Polynom der Zeit  $t$  ist, darf  $\bar{\alpha} > 0$  beliebig klein sein und  $\alpha > \bar{\alpha}$  sowie die Eigenwertbedingung (3.116) sind erfüllt. Obwohl die Annahme 3.3 verletzt ist, da die Solltrajektorie  $\bar{y}(t) = 10 + t$  mit zunehmender Zeit gegen unendlich strebt, und es deswegen keine Turnpike gibt, ist  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  dennoch

ein Agreeable Plan. Simulationsergebnisse mit und ohne Umschalten von  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  zu  $\mathbf{u}_{T_{AP},T}^*(\cdot)$  und der Vergleich zur optimalen Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  für  $T \in \{5\text{ s}; 10\text{ s}; 15\text{ s}\}$  zeigt die Abbildung 2.5, S. 28.

### 3.5.4 Eine Faustregel zur Anwendbarkeit des Agreeable Plan über den vollständigen endlichen Horizont

Im vorherigen Abschnitt wurde anhand der Ungleichung (3.136) festgestellt, dass die Zeit  $T_{AP}$ , über die der Agreeable Plan  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  angewendet werden darf, essentiell von der Größe des Parameters  $\alpha$  aus Lemma 3.1 abhängt. Die Größe von  $\alpha$  wird durch den Kehrwert der größten Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises beschränkt und hängt damit unter anderem von den Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  ab. Im Falle einer Modifikation der Kosten wie (3.65) in Abschnitt 3.4.4 mit  $\tilde{\mathbf{Q}}$  wird  $\alpha$  sogar gezielt beeinflusst. Es stellt sich nun die Frage, welchen Einfluss eine Vergrößerung von  $\alpha$  durch Anpassung der Gewichtungen auf den Zeitabstand  $T - T_{AP}$  für ein festes  $T > 0$  hat und ob daraus eine qualitative Aussage zu der Kostendifferenz

$$J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \quad (3.138)$$

getroffen werden kann. Daraus lässt sich ableiten, ob auf das Umschalten verzichtet werden kann und stattdessen der Agreeable Plan über den gesamten endlichen Horizont angewendet werden kann.

Dabei ist zu beachten, dass die Konstante  $M_J^{\text{AP}}$  in (3.136) auch implizit von  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{Q}}$  und auch von  $\alpha$  beeinflusst wird. Die relevanten Zeitkonstanten, die von den Gewichtungen abhängen und die letztendlich durch  $\alpha$  sowie  $\bar{\alpha}$  gemäß Lemma 2.1 und Lemma 3.1 charakterisiert werden (siehe S. 57 bzw. 96), wurden in der Abschätzung in (3.135) durch die Exponentialfunktionen bereits berücksichtigt. Es ist daher nachzuvollziehen, dass die Konstante  $M_J^{\text{AP}}$  nicht exponentiell von den Gewichtungen und  $\alpha$  abhängt.<sup>17)</sup> Ist demnach  $\alpha$  hinreichend groß, dann ist der Zeitabstand  $T - T_{AP}$  gemäß (3.136) näherungsweise antiproportional zu  $\alpha$ . D. h., die Länge des Intervalls  $T - T_{AP}$ , auf dem von  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  zu  $\mathbf{u}_{T_{AP},T}^*(\cdot)$  umgeschaltet

<sup>17)</sup>Ein Startpunkt für eine quantitative Analyse dieser Abhängigkeit sind die Bestimmung der Konstanten  $\tilde{M}_P$  in Lemma 2.1 nach [40] sowie aussagekräftige Schranken der Eigenwerte der Lösung  $\mathbf{P} \succeq \mathbf{0}$  der algebraischen Riccatigleichung (3.15) bzw. der Lösung  $\tilde{\mathbf{P}} \succeq \mathbf{0}$  von (3.63), siehe hierzu [104] und für eine Übersicht [114, 142].

werden muss, um  $\Delta_{0,T}^{\text{AP}} J(\cdot) \leq \epsilon$  für ein festgelegtes  $\epsilon > 0$  zu garantieren, nimmt durch die Vergrößerung von  $\alpha$  ab.

Da die Zeit, in der  $\mathbf{u}_{T_{\text{AP}},T}^*(\cdot)$  statt  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  implementiert wird, für ein wachsendes  $\alpha$  immer kürzer werden kann, erwartet man, dass auch ohne Umschalten die Kostendifferenz

$$\Delta J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot) = J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \quad (3.139)$$

auf dem schrumpfenden Intervall  $[T_{\text{AP}}, T]$  abnimmt. Offensichtlich ist  $J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot))$  eine obere Schranke von  $\Delta J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot)$ . Für ein wachsendes  $\alpha$  nimmt die größte Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises gemäß (3.87a) ab und die Kosten  $J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot))$  werden durch das stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des Agreeable Plan  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  dominiert. Ist es dann möglich mittels der Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  oder  $\mathbf{R}$  den Parameter  $\alpha$  immer größer werden zu lassen, so werden die Kosten  $J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot))$  für ein festes  $T_{\text{AP}} > 0$  konvergieren. Hierbei sind zwei mögliche Fälle zu berücksichtigen. Der Grenzwert für ein festes  $\mathbf{Q}$  und einen gegen null laufenden maximalen Eigenwert  $\lambda_{\max}(\mathbf{R})$  ist durch

$$\frac{1}{2} \int_{T_{\text{AP}}}^T \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{x}} \, dt \quad (3.140)$$

gegeben. Falls es möglich ist,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$  durch eine exakte Folgeregelung zu erreichen, dann ist der Grenzwert für einen gegen  $+\infty$  laufenden kleinsten Eigenwert  $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$  und ein festes  $\mathbf{R}$  durch

$$\frac{1}{2} \int_{T_{\text{AP}}}^T \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{F}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}} \, dt \quad (3.141)$$

gegeben. Eine Analyse dieser beiden Grenzfälle erfolgt in Kapitel 4. Dort werden auch die den Grenzwerten zugehörigen Paare  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  bestimmt.

Da gleichzeitig der Zeitabstand  $T - T_{\text{AP}}$ , über den integriert wird, mit wachsendem  $\alpha$  nach (3.136) abnehmen darf, läuft die obere Schranke  $J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot))$  von  $\Delta J_{T_{\text{AP}},T}(\cdot)$  für  $\alpha \rightarrow \infty$  gegen null. Unter diesen Umständen existiert dann für ein beliebiges  $\epsilon > 0$  auch immer eine Gewichtung, die zu einem hinreichend großen  $\alpha$  führt, sodass

$$\Delta J_{0,T}(\cdot) = J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot)) \leq \epsilon \quad (3.142)$$

erfüllt wird. Es ist jedoch nicht immer möglich,  $\alpha$  durch die Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  beliebig zu vergrößern.<sup>18)</sup> Passt man jedoch den Ansatz aus [6, Kap. 3.5] wie in der Veröffentlichung [22] an, so kann mittels einer geeigneten Wahl der Gewichtung  $\tilde{\mathbf{Q}}$  in (3.65) in Abhängigkeit eines gewünschten  $\alpha$  dieses explizit vorgegeben werden. Für die obige Analyse kommt man zum selben Ergebnis (3.142), wie aus der Veröffentlichung [22] hervorgeht.

Aus der Diskussion gewinnt man die folgende

**Faustregel:** Gilt für das Verhältnis

$$\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{R})} \gg 1 \quad (3.143)$$

und für den gemäß Lemma 3.1 bestimmten Parameter  $\alpha \gg 0$  sowie für das Verhältnis  $\frac{\alpha}{\alpha} \gg 1$ , so ist zu erwarten, dass der Agreeable Plan  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  die optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  auf dem ganzen Horizont  $[0, T]$  zufriedenstellend approximiert.

Ein Beispiel stellt die Zusammenhänge dar.

**Beispiel 3.2.** Für den Agreeable Plan  $(x^*(t), u^*(t))$  zum Beispiel 2.3, S. 28, bzw. zum Gegenbeispiel 3.2, S. 102, werden eine absolute Kostendifferenz  $\Delta_{0,T}J(\cdot)$  und eine relative Kostendifferenz

$$\frac{J(\cdot, u^*(\cdot))}{J_{0,T}(\cdot, u_T^*(\cdot))}$$

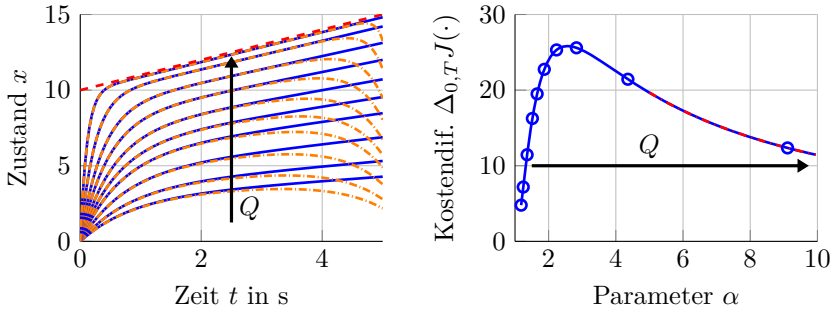
für einen Horizont der Länge  $T = 5$  s und für zunehmendes  $\alpha$  infolge der Gewichtungen

$$\mathbf{Q} \in \{0,4; 0,55; 0,85; 1,3; 1,75; 2,5; 4; 7; 18; 82\} \quad (3.144)$$

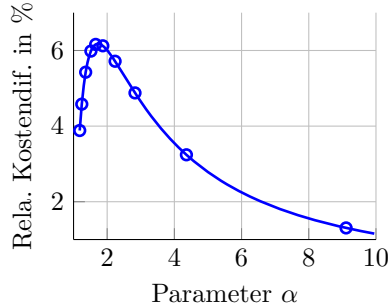
und  $\mathbf{R} = 1$  untersucht. Die Abbildung 3.5a zeigt die jeweils zugehörigen Zustandsverläufe  $x^*(t)$  (—) und  $x_T^*(t)$  (---) sowie absoluten Kostendifferenzen (○) aufgetragen über die resultierenden  $\alpha$ . Eine relative Kostendifferenz ist in Abbildung 3.5b dargestellt. Beide Kostendifferenzen (—) wurden auch für 58 weitere Stützstellen von  $\mathbf{Q}$  ermittelt.

Es ist zu erkennen, dass die Abweichung zur Solltrajektorie (---) mit der Zunahme der Gewichtung  $\mathbf{Q}$  stetig abnimmt. Dies tritt hier ein, da

<sup>18)</sup> Wie sich die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises asymptotisch in Abhängigkeit von  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  verhalten, ist z. B. in [6, Kap. 6] und [81, 139] nachzulesen. Dabei sind insbesondere die Systemnullstellen von  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ , vgl. [137, 144], relevant.



(a) Zustände und absolute Kostendifferenz.

(b) Relative Kostendifferenz  $\Delta_{0,T}J(\cdot)/J_{0,T}(\cdot, u_T^*(\cdot))$ .

**Abbildung 3.5:** Darstellung der Zustände  $x_i^*(t)$  (—) und  $x_{T,i}^*(t)$  (---), der Solltrajektorie (---) sowie der absoluten und relativen Kostendifferenz (○) für verschiedene Gewichte  $Q_i$ .

eine exakte Folgeregelung für das Beispiel existiert. Die absolute Kostendifferenz steigt zunächst bis  $\alpha = 2,55$  für  $Q = 5,5$  an und nimmt danach ab. Für höhere  $\alpha \geq 5$  wird die Kostendifferenz durch die Hyperbel  $-1,602 + \frac{166,835}{\alpha + 2,84}$  (---) approximiert. Die relative Kostendifferenz zeigt einen ähnlichen Verlauf, jedoch fällt sie stärker ab als die absolute, was durch die zwangsläufig mit  $Q$  ansteigenden absoluten Kosten  $J_{0,T}(\cdot, u_T^*(\cdot))$  verursacht wird. Für  $Q = 16$  beträgt die relative Kostendifferenz bereits weniger als 3,5% und der Agreeable Plan  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  approximiert die optimale Lösung  $(x_T^*(\cdot), u_T^*(\cdot))$  zufriedenstellend über den ganzen endlichen Horizont  $[0, T]$ .

### 3.5.5 Fazit

Der Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  aus Satz 3.1 ist der Grenzwert der Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  für  $T \rightarrow \infty$ , falls die größte Zeitkonstante des mit  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  geschlossenen Regelkreises kleiner ist als die kleinste Zeitkonstante des Exosystems. Diese Forderung wird von jeder Folgeregulierung sinnvollerweise erfüllt. Ist der Kandidat überholend optimal unter der Annahme beschränkter Solltrajektorien und Störungen, dann ist eine Turnpike des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  durch sein stationäres Verhalten explizit bestimmt, selbst wenn nichtperiodische Soll- oder Störgrößen vorliegen. Trifft hingegen die Annahme 3.3 nicht zu, so ist der Kandidat immer noch ein Agreeable Plan und er approximiert die Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  auf einem Teilintervall des endlichen Horizontes sehr genau. Ist die größte Zeitkonstante des mit  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  geschlossenen Regelkreises sehr klein, so ist zu erwarten, dass die Approximation sogar über den ganzen endlichen Horizont  $[0, T]$  zufriedenstellend ist.

## 3.6 Verbindung zur Lösung eines statischen Optimierungsproblems

Mithilfe der vorangegangenen Ergebnisse wird in diesem Abschnitt gezeigt, dass es unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist, das optimale stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  nach Korollar 3.1 (siehe S. 82) als Lösung eines statischen Optimierungsproblems zu bestimmen. Dies ist der in Abschnitt 3.2 erläuterte Beitrag B7). Die daraus gewonnenen Erkenntnisse können beispielsweise dazu genutzt werden, um Folgeregulungen zu entwerfen, die effizient bezüglich der Stellenergie sind und gleichzeitig vorgegebene Schranken für den Folgefehler einhalten. Letztere wurden bisher nicht explizit berücksichtigt. Hierauf wird in den abschließenden Bemerkungen eingegangen und das zugehörige Verfahren wird im Anhang E ergänzt.

Zunächst wird das in [108] eingeführte statische Optimierungsproblem herangezogen, dass zur Bestimmung exakter Folgeregulungen für überaktuierte Systeme vorgeschlagen wurde. Dessen Lösung soll ein stationäres Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  liefern, das  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$  unter der bestmöglichen Stellenergie über einen unendlichen Horizont erreicht. Dieses Verfahren wird in Quellen wie [69, 70, 148] und auch anderen angewendet.

Angenommen man fordert statt  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ , worauf erst in Kapitel 4 eingegangen wird, dass der Ausgang der Solltrajektorie optimal im Sinne eines Problems  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  folgt. Dann ist die in [108] formulierte Zielstellung gleichbedeutend damit, ein optimales stationäres Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  gemäß Korollar 3.1 zu bestimmen. Das angepasste statische Optimierungsproblem aus [108] lautet:

### Statisches Optimierungsproblem 3.1.

$$\begin{aligned} \underset{\Pi_x, \mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \quad & \frac{1}{2} \cdot \operatorname{spur} \left( (\mathbf{C}\Pi_x + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{C}\Pi_x + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}}) + \mathbf{F}^\top \mathbf{R} \mathbf{F} \right) \\ \text{u. d. Nb.:} \quad & \Pi_x \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\Pi_x + \mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{E}_d. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Die Nebenbedingung garantiert, dass  $(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  ein stationäres Verhalten zur Systemdynamik (3.1a) ist. Die Gütefunktion bewertet die Spur<sup>19)</sup> der Gewichtungsmatrix der quadratischen Form, die der Integrand des Gütefunktional (3.3) für das stationäre Verhalten annimmt.

Bisher ist es jedoch nicht erwiesen, dass das Ziel, ein optimales stationäres Verhalten zu bestimmen, so tatsächlich erreicht wird. Insbesondere ist noch unklar, ob das hierdurch berechnete stationäre Verhalten auch für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  optimal ist.

Dieser Abschnitt belegt durch einen formalen Beweis, dass unter der Annahme 3.3 die Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1 das optimale stationäre Verhalten gemäß Korollar 3.1 liefert. Dabei werden die Ergebnisse aus den Veröffentlichungen [20, 21] auf nichtperiodische Solltrajektorien und Störungen erweitert. Dieses Vorgehen begründet die Wahl des Gütemaßes des statischen Optimierungsproblems 3.1, dessen Motivation in [108] ausbleibt. Ein kompakter Nachweis ist auch über die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung aus Anhang A.2 möglich, was die Bemerkung 3.12 am Ende des Abschnittes aufzeigt.

In [108] wird darauf hingewiesen, dass die Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1 *nicht* invariant gegenüber dem gewählten Koordinatensystem der Zustandsraumdarstellung  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$  des Exosystems (3.2a) ist. Daher verlangt [108], dass das Exosystem mit einer regulären Matrix  $\mathbf{T}$ , für die die Bedingung

$$\frac{d}{dt} \left( \bar{\mathbf{x}}(t)^\top \mathbf{T}^\top \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}(t) \right) \equiv 0 \quad (3.146)$$

<sup>19)</sup>Die Spur einer quadratischen Matrix entspricht der Summe ihrer Diagonalelemente und auch der Summe ihrer Eigenwerte.

erfüllt ist, transformiert wird. Dieser Schritt wird zwar in der Literatur wie [69, 70, 148] vernachlässigt, ist aber unabdingbar, um eine sinnvolle Lösung zu erhalten. Es ist ersichtlich, dass diese Bedingung nicht erfüllt werden kann, falls die Soll- und Störgrößen und damit die Zustände des Exosystems unbeschränkt sind. Die Bedingung (3.146) impliziert sowohl die Annahme 3.3 als auch die Forderung nach einem speziellen Koordinatensystem für das Exosystem.

Es wird nun eine Basis für das Exosystem gesucht, sodass die Bedingung  $\frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{x}}(t)^T \bar{\mathbf{x}}(t)) = 0$  erfüllt wird. Die Anwendung der Produktregel ergibt

$$\bar{\mathbf{x}}(t)^T (\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{A}}) \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv 0. \quad (3.147)$$

Da dies für beliebige Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$  zutreffen muss, ist (3.147) genau dann erfüllt, falls für die Systemmatrix des Exosystems

$$\bar{\mathbf{A}} = -\bar{\mathbf{A}}^T \quad (3.148)$$

gilt. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass  $\bar{\mathbf{A}}$  schiefssymmetrisch ist. Unter der Annahme 3.3 kann dies immer durch die folgende intuitive Zustandsraumdarstellung erreicht werden.

Hierzu sei zunächst das Frequenzspektrum des Exosystems

$$\bar{\Omega} = \{\omega_j = \Im\{\lambda_j\} \geq 0 \mid \lambda_j \in \sigma(\bar{\mathbf{A}}), j = 1, \dots, \bar{n}\} \quad (3.149)$$

definiert. Da eine Kreisfrequenz  $\omega$  mehr als einmal in  $\bar{\Omega}$  enthalten sein kann, sei  $\bar{n}_{\bar{\Omega}}(\omega)$  die zugehörige Vielfachheit von  $\omega \in \bar{\Omega}$ . Die Anzahl unterschiedlicher Kreisfrequenzen in  $\bar{\Omega}$ , die ungleich null sind, sei  $\bar{N}_{\bar{\Omega}}$ .

Von hier an wird der allgemeine Fall betrachtet, für den es wenigstens ein Element in  $\bar{\Omega}$ , das gleich null ist, und eines, das ungleich null ist, gibt. Unter der Annahme 3.3 kann dann die Systemmatrix von (3.2a) immer in einer blockdiagonalen Form

$$\bar{\mathbf{A}} = \text{diag}(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{A}}_1, \dots, \bar{\mathbf{A}}_{N_{\bar{\Omega}}}) \quad (3.150)$$

angegeben werden. Der Kreisfrequenz  $\omega = 0$  ist der Block

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{0}_{\bar{n}_{\bar{\Omega}}(0) \times \bar{n}_{\bar{\Omega}}(0)} \quad (3.151)$$

zugeordnet. Jede Kreisfrequenz  $\omega_j \in \bar{\Omega}$ ,  $j = 1, \dots, \bar{N}_{\bar{\Omega}}$ , mit  $\omega_j \neq 0$  und  $\omega_j \neq \omega_i$ , falls  $j \neq i$ , erhält einen einzelnen Block

$$\bar{\mathbf{A}}_j = \omega_j \left( \mathbf{I}_{\bar{n}_{\bar{\Omega}}(\omega_j)} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad (3.152)$$



wobei das Kronecker-Produkt aus Definition A.3 in Anhang A.1 verwendet wurde. Durch die Wahl dieser Basis ist jeder Zustand  $\bar{x}_{c,i}$ , der ein Element des Zustandsvektors  $\bar{\mathbf{x}}_c$  zum Teilsystem des ersten Blocks  $\bar{\mathbf{A}}_c$  ist, konstant:  $\bar{x}_{c,i}(t) \equiv \bar{x}_{c,i}(0)$ . Der Zustandsvektor zum Teilsystem des  $j$ -ten Blocks  $\bar{\mathbf{A}}_j$  sei  $\bar{\mathbf{x}}_j(t) \in \mathbb{R}^{2\bar{n}_{\bar{\mathbf{A}}}(\omega_j)}$ . Für  $i = 1, \dots, \bar{n}_{\bar{\mathbf{A}}}(\omega_j)$  ist das  $(2i - 1)$ -te Element

$$\bar{x}_{j,2i-1}(t) = \hat{A}_{j,i} \cos(\omega_j t + \beta_{j,i}) \quad (3.153)$$

und das  $(2i)$ -te Element ist

$$\bar{x}_{j,2i}(t) = \hat{A}_{j,i} \sin(\omega_j t + \beta_{j,i}). \quad (3.154)$$

Die Amplitude  $\hat{A}_{j,i} \in \mathbb{R}$  und die Phasenverschiebung  $\beta_{j,i} \in \mathbb{R}$  sind durch die Anfangswerte  $\bar{x}_{j,2i-1}(0)$  und  $\bar{x}_{j,2i}(0)$  festgelegt.<sup>20)</sup> Da sowohl  $\bar{\mathbf{A}}_c$  als auch alle  $\bar{\mathbf{A}}_j$  schiefsymmetrisch sind, ist auch  $\bar{\mathbf{A}}$  aufgrund der blockdiagonalen Struktur (3.150) schiefsymmetrisch und die Bedingung (3.147) ist erfüllt.

Auf der Grundlage dieser Zustandsraumdarstellung des Exosystems wird im nächsten Lemma der Mittelwert der Kosten  $J_{0,T}(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  eines stationären Verhaltens explizit in Abhängigkeit von  $\Pi_x$  und  $\mathbf{F}$  berechnet. Diese explizite Form bildet den Ausgangspunkt, um im Anschluss von der Minimierung des quadratischen Mittelwertes nach  $\Pi_x$  und  $\mathbf{F}$  auf das statische Optimierungsproblem 3.1 zu schließen.

**Lemma 3.3.** *Das Paar  $(\Pi_x, \mathbf{F})$  erfülle die Nebenbedingung (3.145). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege das Exosystem (3.2) in einer Zustandsraumdarstellung vor, sodass (3.150) gilt. Es sei eine Funktion*

$$\mathbf{G}(\Pi_x, \mathbf{F}) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1/2}(\mathbf{C}\Pi_x + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}) \\ \mathbf{R}_{1/2}\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

mit  $\mathbf{Q}_{1/2}^\top \mathbf{Q}_{1/2} = \mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}_{1/2}^\top \mathbf{R}_{1/2} = \mathbf{R}$  definiert. Für diese gilt

$$\mathbf{G}^\top \mathbf{G} = \frac{1}{2} ((\mathbf{C}\Pi_x + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{C}\Pi_x + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}) + \mathbf{F}^\top \mathbf{R} \mathbf{F}). \quad (3.157)$$

<sup>20)</sup>Für jedes  $t \geq 0$  gilt der Zusammenhang

$$\hat{A}_{j,i} \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t + \beta_{j,i}) \\ \sin(\omega_j t + \beta_{j,i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\sin(\omega_j t) & \cos(\omega_j t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{j,2i-1}(0) \\ \bar{x}_{j,2i}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.155)$$

Für jeden Anfangswert

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c(0)^\top & \bar{\mathbf{x}}_1(0)^\top & \dots & \bar{\mathbf{x}}_{\bar{N}_{\bar{\Omega}}}(0)^\top \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_0^\top \quad (3.158)$$

ist der quadratische Mittelwert (QMW) des stationären Verhaltens  $(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  mit dem Kostenfunktional (3.3) durch

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_{0,T}(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) &= \bar{\mathbf{x}}_c(0)^\top \mathbf{G}_c^\top \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{x}}_c(0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\bar{N}_{\bar{\Omega}}} \bar{\mathbf{x}}_j(0)^\top \left( \mathbf{G}_j^\top \mathbf{G}_j + \frac{1}{\omega_j^2} \bar{\mathbf{A}}_j^\top \mathbf{G}_j^\top \mathbf{G}_j \bar{\mathbf{A}}_j \right) \bar{\mathbf{x}}_j(0) \end{aligned} \quad (3.159)$$

bestimmt, wobei  $\mathbf{G}_c$  bzw.  $\mathbf{G}_j$  die Spalten von  $\mathbf{G}$  sind, die den Zustandsvektoren  $\bar{\mathbf{x}}_c$  bzw.  $\bar{\mathbf{x}}_j$  mittels  $\mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}$  zugeordnet werden.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt in Anhang D.6. □

Anhand der Definition 2.4, S. 20, ist es leicht nachzuvollziehen, dass das optimale stationäre Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  nach Korollar 3.1 ebenfalls QMW-optimal<sup>21)</sup> für beliebige Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist. Daher minimiert das Paar  $(\Pi_x^*, \mathbf{F}^*)$  den quadratischen Mittelwert (3.159) für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Im nächsten Satz wird nachgewiesen, dass diese Minimierung von (3.159) äquivalent zum statischen Optimierungsproblem 3.1 ist. Um hieraus aber von einer Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1 auf das Paar  $(\Pi_x^*, \mathbf{F}^*)$  zu schließen, muss die Minimierung von (3.159) mittels der Variablen  $\Pi_x$  und  $\mathbf{F}$  auch eine eindeutige Lösung besitzen. Unter der Prämisse, dass das optimale stationäre Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  tatsächlich die eindeutige QMW-optimale Lösung für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist, trifft dies zu.

Wie am Beispiel 2.1, S. 22, demonstriert wurde, muss ein optimales stationäres Verhalten allerdings nicht auf eine eindeutige QMW-optimale Lösung führen. Werden wie in diesem Abschnitt jedoch nur Lösungen der Gestalt  $(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zugelassen, dann ist die eindeutige QMW-optimale Lösung durch  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  gegeben. Die damit verbundene Problemstellung und ein formaler Beweis dieser Aussage sind Teil des Abschnittes 4.4.4 in Kapitel 4, daher wird hier auf eine Herleitung verzichtet.

<sup>21)</sup>Siehe Definition 2.5 in Abschnitt 2.2.1, S. 21.

Es folgt das dritte Hauptresultat dieser Arbeit. Es besagt, dass unter einfachen Voraussetzungen das optimale stationäre Verhalten sowohl mittels der Entwurfsgleichungen (3.13) und (3.20b) als auch durch die Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1 bestimmt werden kann.

**Satz 3.8.** *Die Annahmen 3.1 bis 3.3 aus Abschnitt 3.1 seien erfüllt. Das Exosystem (3.2a) liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit in einer Zustandsraumdarstellung vor, für die (3.150) gilt. Für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist das optimale stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , welches durch das nach Satz 3.1, S. 71, ermittelte Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  bestimmt ist, äquivalent durch die eindeutige Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1, S. 116, bestimmt.*

*Beweis.* Unter Berücksichtigung der spaltenweisen Unterteilung der Matrix  $\mathbf{G}$  aus (3.156) im Lemma 3.3 sei eine Funktion

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F}) := \text{diag} \left( \mathbf{G}_c, \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\omega_1} \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{A}}_1 \right], \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\omega_2} \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{A}}_2 \right], \dots \right) \quad (3.160)$$

definiert, sodass für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  der quadratische Mittelwert (3.159) durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_0^\top \tilde{\mathbf{G}}^\top \tilde{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{x}}_0 &= \bar{\mathbf{x}}_c(0)^\top \mathbf{G}_c^\top \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{x}}_c(0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \bar{\mathbf{x}}_j(0)^\top \left( \mathbf{G}_j^\top \mathbf{G}_j + \frac{1}{\omega_j^2} \bar{\mathbf{A}}_j^\top \mathbf{G}_j^\top \mathbf{G}_j \bar{\mathbf{A}}_j \right) \bar{\mathbf{x}}_j(0) \end{aligned} \quad (3.161)$$

ausgedrückt wird. Im Folgenden sei  $\tilde{\mathbf{G}}^* := \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$ . Aus der vorangegangenen Diskussion ist bekannt, dass  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  die eindeutige Lösung der Minimierung des quadratischen Mittelwerts (3.159) zu jedem  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist. Daher muss für jedes andere Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$ , das nur zulässig ist, wenn es die Nebenbedingung (3.145) erfüllt, die Ungleichung

$$\bar{\mathbf{x}}_0^\top \tilde{\mathbf{G}}^\top \tilde{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{x}}_0 \geq \bar{\mathbf{x}}_0^\top \tilde{\mathbf{G}}^{*\top} \tilde{\mathbf{G}}^* \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (3.162)$$

für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  gelten und für wenigstens ein  $\bar{\mathbf{x}}_0^* \neq \mathbf{0}$  gilt

$$\bar{\mathbf{x}}_0^{*\top} \tilde{\mathbf{G}}^\top \tilde{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{x}}_0^* > \bar{\mathbf{x}}_0^{*\top} \tilde{\mathbf{G}}^{*\top} \tilde{\mathbf{G}}^* \bar{\mathbf{x}}_0^*. \quad (3.163)$$

Man definiert nun

$$\Delta \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F}) := \tilde{\mathbf{G}}^\top \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^{*\top} \tilde{\mathbf{G}}^*. \quad (3.164)$$

Wegen (3.162) ist diese symmetrische Matrix positiv semidefinit und damit sind alle ihre Eigenwerte größer gleich null. Aufgrund von (3.163) ist außerdem mindestens einer ihrer Eigenwerte größer als null. Für ihre Spur, die der Summe ihrer Eigenwerte entspricht, folgt daher

$$\text{spur} \left( \Delta \tilde{\mathbf{G}}^* (\cdot) \right) = \text{spur} \left( \tilde{\mathbf{G}}^{\top} \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}^{*\top} \tilde{\mathbf{G}}^* \right) > 0. \quad (3.165)$$

Man beachte, dass  $\frac{1}{\omega_j} \overline{\mathbf{A}}_j$  aufgrund von (3.152) eine orthogonale Matrix ist und damit  $\frac{1}{\omega_j^2} \overline{\mathbf{A}}_j^{\top} \overline{\mathbf{A}}_j = \mathbf{I}$  erfüllt. Daher ergibt sich

$$\text{spur} \left( \frac{1}{\omega_j^2} \overline{\mathbf{A}}_j^{\top} \mathbf{G}_j^{\top} \mathbf{G}_j \overline{\mathbf{A}}_j \right) = \text{spur} \left( \mathbf{G}_j^{\top} \mathbf{G}_j \right), \quad (3.166)$$

da die Spur invariant gegenüber einer Ähnlichkeitstransformation ist.<sup>22)</sup> Auf Basis von (3.161) und (3.166) wird dann

$$\text{spur} \left( \tilde{\mathbf{G}}^{\top} \tilde{\mathbf{G}} \right) = \text{spur} \left( \mathbf{G}_c^{\top} \mathbf{G}_c \right) + \sum_{j=1}^{\overline{N}_{\overline{\mathbf{G}}}} \text{spur} \left( \mathbf{G}_j^{\top} \mathbf{G}_j \right) = \text{spur} \left( \mathbf{G}^{\top} \mathbf{G} \right) \quad (3.167)$$

berechnet, wobei  $\mathbf{G}$  gemäß Lemma 3.3 festgelegt ist und  $\text{spur} \left( \mathbf{G}^{\top} \mathbf{G} \right)$  der Gütefunktion des statischen Optimierungsproblems 3.1 entspricht. Sei  $\mathbf{G}^* := \mathbf{G}(\boldsymbol{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$ , so führt (3.165) mit (3.167) für jedes zulässige Paar  $(\boldsymbol{\Pi}_x, \mathbf{F}) \neq (\boldsymbol{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  auf

$$\text{spur} \left( \mathbf{G}^{\top} \mathbf{G} \right) > \text{spur} \left( \mathbf{G}^{*\top} \mathbf{G}^* \right) \quad (3.168)$$

und  $(\boldsymbol{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$ , gegeben durch Satz 3.1, ist die eindeutige Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1.  $\square$

Die Beweisführung zeigt, dass es möglich ist, die simultane Minimierung des quadratischen Mittelwertes (3.159) für jedes  $\overline{\mathbf{x}}_0$  in die Minimierung von  $\text{spur}(\mathbf{G}^{\top} \mathbf{G})$  zu überführen. Damit motiviert sie das Gütemaß des statischen Optimierungsproblems 3.1. Erst diese Formulierung unabhängig vom Anfangswert  $\overline{\mathbf{x}}_0$  erlaubt es, die herkömmlichen Methoden wie in Anhang A.2 zur Lösung zu nutzen. Auf deren Basis wird in der nächsten Bemerkung eine alternative Möglichkeit zum Beweis von Satz 3.8 aufgezeigt. Im Anschluss folgen vier weitere Bemerkungen.

<sup>22)</sup> Dies folgt aus der Rechenregel  $\text{spur}(\mathbf{ABC}) = \text{spur}(\mathbf{BCA})$ , siehe [30, Kap. 2.2].

**Bemerkung 3.12.** Die Aussage von Satz 3.8 ist auch nachweisbar, indem die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für das statische Optimierungsproblem (3.1) aufgestellt werden. Hierzu führt man die Lagrange-Multiplikatoren  $\Pi_\phi \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  und die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Pi_x, \mathbf{F}, \Pi_\phi) = & \frac{1}{2} \cdot \text{spur} \left( (C\Pi_x + D_d - \overline{C})^\top Q (C\Pi_x + D_d - \overline{C}) + \right. \\ & \left. \mathbf{F}^\top R \mathbf{F} \right) + \text{spur} \left( \Pi_\phi^\top (-\Pi_x \overline{A} + A\Pi_x + B\mathbf{F} + E_d) \right) \quad (3.169) \end{aligned}$$

ein und bestimmt die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung<sup>23)</sup>

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\Pi_x, \mathbf{F}, \Pi_\phi)}{\partial \Pi_x} \right|_{\Pi_x^*, \mathbf{F}^*, \Pi_\phi} = \mathbf{0}, \quad (3.170a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\Pi_x, \mathbf{F}, \Pi_\phi)}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\Pi_x^*, \mathbf{F}^*, \Pi_\phi} = \mathbf{0}. \quad (3.170b)$$

Zusammen mit der Nebenbedingung (3.145) stimmt (3.170a) mit der Sylvestergleichung (3.13) überein, falls  $\overline{A} = -\overline{A}^\top$  zutrifft. Weiterhin stimmt (3.170b) mit der Gleichung (3.20b) für das Vorfilter  $\mathbf{F}^*$  überein. Wie aus Satz 3.1 bekannt ist, haben die Gleichungen (3.13) und (3.20b) eine eindeutige Lösung  $(\Pi_x^*, \Pi_\phi, \mathbf{F}^*)$ , die daher auch die eindeutige Lösung der Optimalitätsbedingung (3.170) zusammen mit der Nebenbedingung (3.145) ist. Folglich ist  $(\Pi_x^*, \mathbf{F}^*)$  der einzige Kandidat für ein Minimum. Aufgrund der gewählten Gewichtungen  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  ist die Hesse-Matrix von  $\mathcal{L}(\Pi_x, \mathbf{F}, \Pi_\phi)$  positiv semidefinit und somit ist auch die notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung<sup>24)</sup> erfüllt. Aufgrund des quadratischen Gütemaßes ist das bereits hinreichend dafür, dass  $(\Pi_x^*, \mathbf{F}^*)$  die eindeutige optimale Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1 ist, wie es mithilfe der Variationsrechnung in Anhang A.2.2 nachvollzogen werden kann. Dass die notwendigen Optimalitätsbedingungen mit der Nebenbedingung (3.145) hinreichend sind, ist auch durch die Konvexität<sup>25)</sup> des statischen Optimierungsproblems 3.1 begründet, vergleiche hierzu [35, Abschn. 5.5.3], [157, Kap. 16.3].

<sup>23)</sup>Vergleiche die notwendige Optimalitätsbed. (A.22) erster Ordnung aus Anhang A.2.2.

<sup>24)</sup>Vergleiche die notw. Optimalitätsbed. (A.23) zweiter Ordnung aus Anhang A.2.2.

<sup>25)</sup>Ein quadratisches Gütemaß mit positiv semidefiniter Gewichtungsmatrix und affin lineare Nebenbedingungen führen auf ein konvexes Minimierungsproblem.

Hierdurch ist auch belegt, dass die spezielle Zustandsraumdarstellung des Exosystems mit (3.150) keine Voraussetzung für die Gültigkeit von Satz 3.8 ist. Es genügt bereits, wenn  $\bar{\mathbf{A}}$  schiefsymmetrisch ist.

**Bemerkung 3.13.** In [108] wird für die Eindeutigkeit der Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1 die Bedingung  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \succ \mathbf{0}$  als hinreichendes Kriterium angegeben. Durch Satz 3.8 wird belegt, dass unter den Standardannahmen 3.1 bis 3.3 die Eindeutigkeit auch garantiert ist, falls lediglich  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \succeq \mathbf{0}$  vorliegt.

**Bemerkung 3.14.** Durch Satz 3.8 wird auch aufgezeigt, dass es zur Lösung des statischen Optimierungsproblems 3.1, wie sie z. B. in [69, 70, 148] benötigt wird, genügt, die eindeutige Lösung der algebraischen Sylvestergleichung (3.13) und  $\mathbf{F}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi$  zu bestimmen.

**Bemerkung 3.15.** Unter den Annahmen 3.1 bis 3.3 parametrisiert das gemäß Satz 3.1 berechnete Paar  $(\Pi_x^*, \mathbf{F}^*)$  auch die Turnpike  $\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 nach Satz 3.5. Damit beweist Satz 3.8, dass selbst im Falle nichtperiodischer Solltrajektorien und Störgrößen die Turnpike mittels des statischen Optimierungsproblems 3.1 bestimmt werden kann. In der Literatur wie [43, 154, 171, 173] findet man ein statisches Optimierungsproblem zur Berechnung einer Turnpike nur für konstante Sollgrößen und Störgrößen. Für periodische Größen muss hierzu bereits ein periodisches optimales Regelungsproblem gelöst werden [154, 171, 173], wohingegen für nichtperiodische Größen keine Berechnungsvorschrift angegeben wird [171].

**Bemerkung 3.16** (Einhalten vorgegebener Schranken durch den Folgefehler). Nach [107] ist es nachteilig bei der Formulierung des Problems OFP<sub>∞</sub>3.1, dass keine „direkte Kontrolle“ des stationären Folgefehlers  $(\mathbf{C}\Pi_x^* + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  möglich ist. Dieser hängt implizit von den gewählten Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$ , die in den meisten Fällen durch den Anwender (iterativ) vorgegeben werden, sowie von der Systemdynamik (3.1a), der Dynamik (3.2a) und dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ab. Mithilfe des statischen Optimierungsproblems 3.1 können optimierungsbasierte Ansätze, die vorgegebene Schranken für den stationären Folgefehler beim Entwurf berücksichtigen, entwickelt werden. Zwei Varianten werden in Anhang E, ab S. 247, erläutert und diskutiert. Das erste Verfahren wird in der Veröffentlichung [21] ausführlich vorgestellt.

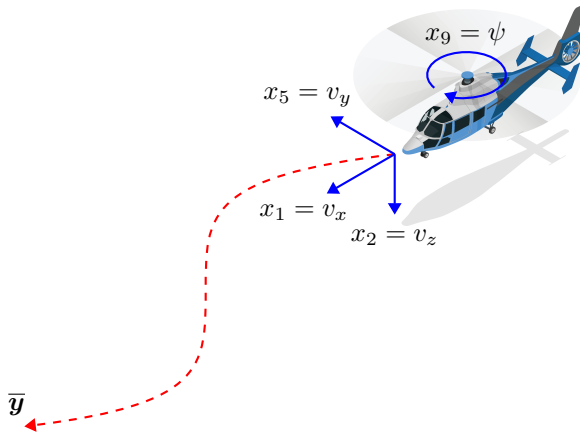
## 3.7 Simulationsbeispiele

Die explizite linear-quadratische optimale Folgeregelung wird zur Regelung eines überaktuierten Helikopters und eines unteraktuierten Drei-Massen-Schwingers eingesetzt. Dabei werden die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels demonstriert.

### 3.7.1 Überaktuiertes System: Helikopter

Es wird der Helikopter *Lynx ZD559* betrachtet. Das lineare Modell mit den Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  im Anhang G.1.1 wurde durch die Linearisierung um eine Ruhelage im Geradeausflug mit einer Längsgeschwindigkeit von 60 Knoten ( $30,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) gewonnen [132, S. 279]. Das Modell hat  $n = 9$  Zustände. Zu diesen gehören die Abweichungen der Längsgeschwindigkeit  $x_1 = v_x$  und Sinkgeschwindigkeit  $x_2 = v_z$  von der Ruhelage sowie die Quergeschwindigkeit  $x_5 = v_y$  (alle in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ). Diese sind in Richtung der jeweiligen Achse des helikopterfesten Relativkoordinatensystems definiert, wobei die  $z$ -Achse nach unten zeigt. Das Relativkoordinatensystem  $xyz$  geht aus der Drehung mit dem Gierwinkel um die vertikale  $z^{\text{I}}$ -Achse des Inertialkoordinatensystems, der anschließenden Drehung mit dem Nickwinkel um die neue  $y'$ -Achse und der abschließenden Drehung mit dem Rollwinkel um die  $x$ -Achse hervor. Die verbleibenden Zustände sind daher die Abweichung des Nickwinkels  $x_4 = \theta$  von der Ruhelage sowie der Rollwinkel  $x_7 = \varphi$  und Gierwinkel  $x_9 = \psi$  (alle in rad) und deren Winkelgeschwindigkeiten  $x_3 = \dot{\theta}$ ,  $x_6 = \dot{\varphi}$  und  $x_8 = \dot{\psi}$  (in  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ). Es stehen  $m = 4$  Stellgrößen durch die Abweichungen der Anstellwinkel (in rad) der Rotorblätter des Hauptrotors  $u_1$  und des Heckrotors  $u_4$  sowie der Winkel (in rad) der zyklischen Blattverstellungen in Richtung der Längsachse  $u_2$  und der Querachse  $u_3$  zur Verfügung [102]. Mit diesen Stellgrößen ist der Helikopter vollständig steuerbar. Die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  weist Eigenwerte mit positivem Realteil auf, d. h., der offene Regelkreis ist instabil.

Es werden zwei Szenarien betrachtet. Im ersten Szenario soll der Helikopter wie in der Abbildung 3.6 eine slalomähnliche Trajektorie fliegen, die durch die eingezeichneten Zustände  $x_1$ ,  $x_5$  sowie  $x_9$  als  $p = 3$  Ausgänge festgelegt ist. Im zweiten Szenario wird ein horizontales kombiniertes Beschleunigungs- und Verzögerungsmanöver durch eine Sollvorgabe für die Längsgeschwindigkeit  $x_1 = v_x$  als einzigen Ausgang ( $p = 1$ )



**Abbildung 3.6:** Helikopter mit Solltrajektorie.

durchgeführt.<sup>26)</sup> Im Gegensatz zum ersten Szenario wird im zweiten die Annahme 3.3 nicht eingehalten, da die Solltrajektorie unbeschränkt über einen unendlichen Horizont ist.

### Beschränkte Solltrajektorien

Die Abbildung 3.6 zeigt den Helikopter, dessen drei Ausgänge

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

der Solltrajektorie

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \left[ 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \frac{25^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \sin \left( 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \right) \right]^T \quad (3.172)$$

folgen sollen, was zu einer slalomartigen Bewegung (---) ähnlich zur eingezeichneten Trajektorie in Abbildung 3.6 führt. Hierbei ist zu beachten, dass auf die Beschleunigung  $\dot{x}_1 = a_x$  eine periodische Störung

$$d(t) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos \left( 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t \right) \quad (3.173)$$

<sup>26)</sup>Die Ausgänge sind hier nicht durch die gemessenen Größen festgelegt, sondern vielmehr durch das Ziel, dass der Helikopter einer Trajektorie folgt, die durch diese Ausgänge parametrisiert werden kann.



wirkt. Die Solltrajektorie und die Störung können durch ein blockdiagonales Exosystem der Ordnung  $\bar{n} = 6$  modelliert werden, das in der intuitiven Koordinatendarstellung aus Abschnitt 3.6 dargestellt wird. Dessen Matrizen sind

$$\bar{\mathbf{A}} = \text{diag} \left( 0, 0, \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad (3.174a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}]. \quad (3.174b)$$

Die Störmatrizen<sup>27)</sup> sind dann

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{e}_1 \bar{\mathbf{e}}_5^T, \quad (3.175a)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{0}. \quad (3.175b)$$

Für dieses Exosystem ist die Annahme 3.3 erfüllt.

Für die vorliegende Konfiguration der Ausgänge und der Stellgrößen gilt

$$\text{rang}(\mathbf{B}) = 4 > 3 = \text{rang}(\mathbf{C}) \quad (3.176)$$

und der Helikopter ist ein überaktuiertes System. Um der Solltrajektorie zu folgen und dabei die zusätzlichen Aktoren möglichst effizient zu nutzen, wird daher eine optimale Folgeregelung zum Problem OFP<sub>∞</sub>3.1 entworfen. Die Gewichtungsmatrizen des Gütefunktional  $J_{0,T}(\cdot)$  aus (3.3) werden für den Folgefehler zu

$$\mathbf{Q} = \rho \cdot \text{diag}(1, 4, 15) \quad (3.177)$$

mit drei unterschiedlich großen Parametern

$$\rho \in \{0,1; 1; 30\} \quad (3.178)$$

und für die Stellgrößen zu  $\mathbf{R} = 10 \frac{180^2}{\pi^2} \cdot \mathbf{I}_4$  gewählt. Der Parameter  $\rho$  beeinflusst, wie genau der Solltrajektorie gefolgt wird. Für jedes  $\rho$  ist die Annahme 3.2 erfüllt.

Für jeden der drei Werte des Parameters  $\rho$  wird nach Satz 3.2 die eindeutige, überholend optimale Lösung für beliebige Anfangswerte des Systems  $\mathbf{x}_0$  und des Exosystems  $\bar{\mathbf{x}}_0$  durch die Implementierung des Regelgesetzes

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}^*(\mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (3.179)$$

---

<sup>27)</sup> Hierin sind  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$  und  $\bar{\mathbf{e}}_i \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  Einheitsvektoren, deren  $i$ -tes Element gleich eins ist und alle anderen Elemente gleich null sind.

aus (3.19) erreicht. Die Rückführmatrix  $\mathbf{K}^*$  und das Vorfilter  $\mathbf{F}^*$  berechnen sich gemäß Satz 3.1, S. 71, wobei lediglich die Lösung der algebraischen Riccatigleichung (3.15) und der Sylvestergleichung (3.13) erforderlich ist. Letztere liefert auch das optimale stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  nach Korollar 3.1, S. 82. Für  $\rho = 30$  sind diese Matrizen in Anhang G.1.2 angegeben. Das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  löst nach Satz 3.8 auch das statische Optimierungproblem 3.1, S. 116. Dessen Minimum beträgt 5,512 für  $\rho = 30$ .

Die drei optimalen Regler werden nun in einer Simulation über das Intervall  $[0, 46,5 \text{ s}]$  untersucht. Hierzu wird das Exosystem mit dem Anfangswert

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} & -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \frac{25^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \sin\left(\frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}\right) & \frac{25^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \cos\left(\frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}\right) & 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

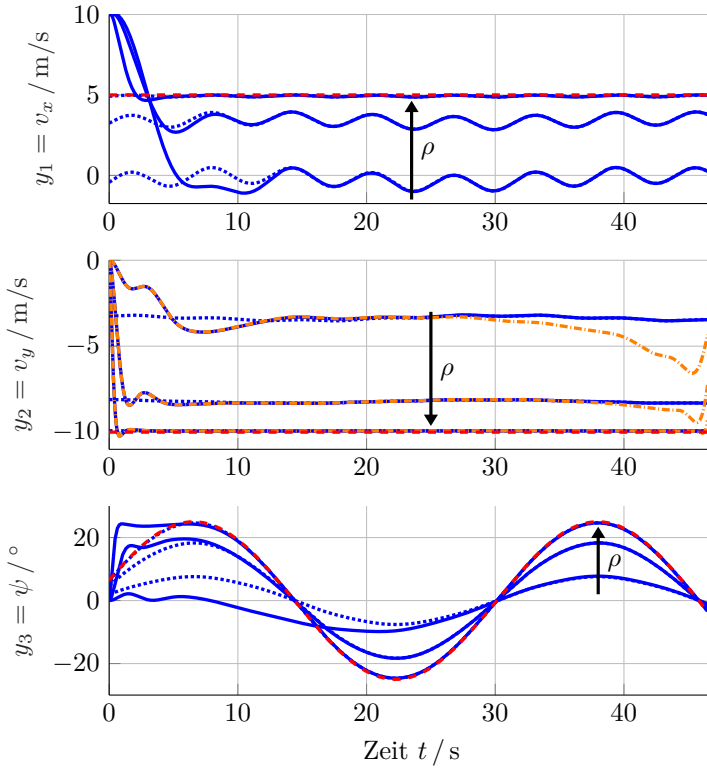
initialisiert, sodass dieses die Zustandsverläufe  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  zu der angegebenen Solltrajektorie und der Störung erzeugt. Der Anfangswert des Systems

$$\mathbf{x}_0 = [10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top \quad (3.181)$$

gibt eine zu hohe Anfangsgeschwindigkeit  $x_1(0) = v_x(0)$  vor.

Die Abbildung 3.7 zeigt den Verlauf der Ausgänge  $\mathbf{y}(t)$  für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—) in Abhängigkeit des Parameters  $\rho$ . Je höher der Folgefehler infolge eines höheren  $\rho$  gewichtet wird, umso geringer wird die Abweichung zur Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  (- -) und umso stärker wird die Störung  $d(t)$  unterdrückt. Letzteres zeigt der Verlauf von  $y_1 = v_x$  besonders deutlich. Nach einer Transitionsphase folgt der Ausgang für  $\rho = 30$  bereits nahezu exakt der Solltrajektorie. In dieser konvergieren die Ausgänge bzw. die zugehörigen Zustände zu ihrem stationären Verlauf  $\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  (⋯) des optimalen stationären Verhaltens. Mit zunehmenden  $\rho$  erfolgt diese Konvergenz schneller, da der größte Realteil der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises abnimmt. Während der Transition wäre jedoch die Implementierung des optimalen Reglers für  $\rho = 30$  kritisch, da dieser typische Stellgrößenbegrenzungen des Helikopters *Lynx ZD559*, wie in [102, Kap. 5.5] angegeben, nicht einhält. Um dies zu vermeiden und eine geeignetere Rückführmatrix  $\mathbf{K}^*$  zu erhalten, könnte die unabhängige Vorgabe der Güte für die Transition und das stationäre Verhalten aus Abschnitt 3.4.4 angewendet werden.

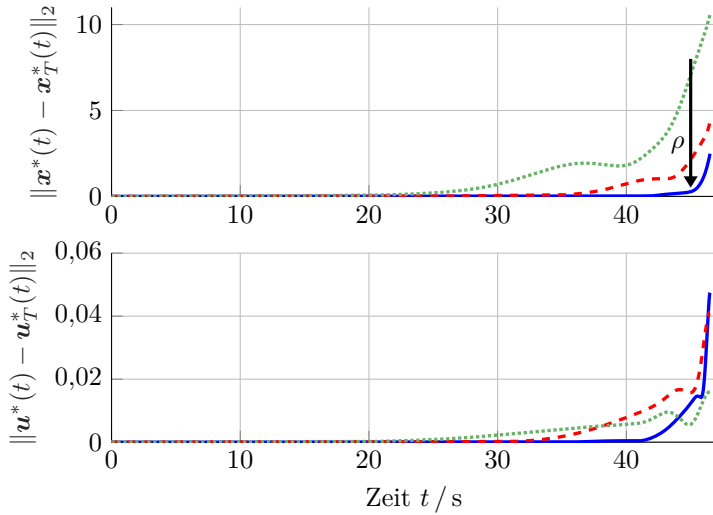
Ein vergleichbares Verhalten ist für die optimale Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t))$  (---) des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 über den endlichen Horizont mit  $T = 46,5 \text{ s}$  zu beobachten, wie es beispielhaft für  $y_2 = x_5$  eingezeichnet ist. Die Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  wird wie in Abschnitt 2.4.1 entworfen. Nach der Transition verweilt die optimale Lösung in der Nähe von  $\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  (⋯) und entfernt sich erst am



**Abbildung 3.7:** Darstellung der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  (—), der Turnpike  $\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  (···) und der Ausgänge  $\mathbf{y}(t)$  für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—) sowie  $\mathbf{u}_T^*(t)$  (---) abhängig von  $\rho$ .

Ende des Intervalls wieder. Dies unterstreicht das Ergebnis aus Satz 3.5, nach dem  $\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  die Turnpike zum Problem  $\text{OFP}_T 3.1$  ist.

Da  $\Re\{\bar{\lambda}\} = 0$  für alle Eigenwerte  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  zutrifft, werden die Eigenwertbedingungen der Sätze 3.4 und 3.7 eingehalten. Infolgedessen bildet die überholend optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  den Grenzwert zur optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t))$  für eine zunehmende Länge  $T$  des Horizontes. Dies begründet die Konvergenz der Abweichungen der Zustände und der Stellgrößen gegen null rückwärts in der Zeit, die die Abbildung 3.8 darstellt und die durch die Ungleichungen (3.91) erklärt wird. Mit zunehmenden  $\rho$  kann infolge des schnelleren geschlossenen Regelkreises der Parameter  $\alpha$

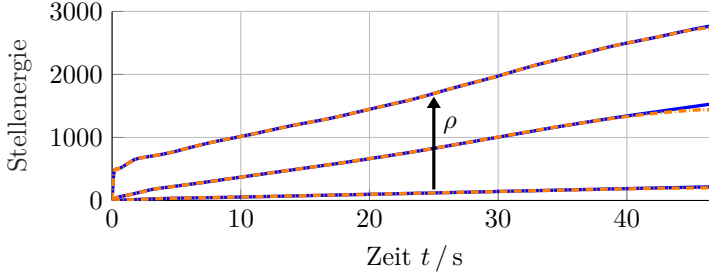


**Abbildung 3.8:** Abweichungen der Zustände und Stellgrößen für die Parameter  $\rho = 0,1$  (---),  $\rho = 1$  (- - -) und  $\rho = 30$  (—).

aus Lemma 3.1 größer gewählt werden. Dadurch ist das schnellere Abklingen der Abweichungen für größere  $\rho$  begründet.

Um abschließend zu beurteilen, wie effizient die überschüssigen Stellgrößen genutzt werden, zeigt die Abbildung 3.9 die Stellenergie. Für  $\rho = 30$  ist ein starker Anstieg der Stellenergie am Anfang des Intervalls während der Transition festzustellen, der durch die kürzere Ausregelzeit begründet ist. Aus der stationären Steigung der Kosten lässt sich schließen, dass infolge einer höheren Gewichtung der Folgefehler mit  $\rho$  mehr Stellenergie investiert wird, um der Solltrajektorie genauer zu folgen. Auf Basis des beobachteten Verhaltens in Abbildung 3.8 ist die überholend optimale Lösung nach Satz 3.7 ein Agreeable Plan zum Problem  $\text{OFP}_T 3.1$ . Es ist daher nachvollziehbar, dass nicht nur die Ausgänge für die überholend optimale Stellgröße  $u^*(\cdot)$  und die optimale Stellgröße  $u_T^*(\cdot)$  mit  $T = 46,5$  s näherungsweise übereinstimmen, sondern auch die Stellenergie. Für  $\rho = 30$  betragen die Mehrkosten an Stellenergie auf dem gesamten Intervall nur +31,72 gegenüber der optimalen Lösung, was relativ bezüglich der minimalen Stellenergie lediglich +1,16 % entspricht.

Dies erlaubt das Fazit: Falls eine sehr genaue Folgeregelung gewünscht ist, dann erreicht die überholend optimale Lösung die bestmögliche Nutzung der überschüssigen Stellgrößen nahezu exakt.



**Abbildung 3.9:** Darstellung der Stellenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \, d\tau$  für  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  (—) und  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  mit  $T = 46,5 \text{ s}$  (---).

### Unbeschränkte Solltrajektorien

Im zweiten Szenario wird ein horizontales Beschleunigungs- und Verzögerungsmanöver im Geradeausflug angestrebt. Dies soll durch die Vorgabe einer Solltrajektorie für die Abweichung der Längsgeschwindigkeit

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = v_x \quad (3.182)$$

erzielt werden, wobei der Helikopter von  $\bar{v}_x(0) = 0$  und  $\bar{a}_x(0) = 0$  auf  $\bar{v}_x(10 \text{ s}) = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  beschleunigen und danach wieder vollständig verzögern soll, sodass  $\bar{v}_x(20 \text{ s}) = 0$  und  $\bar{a}_x(20 \text{ s}) = 0$  erfüllt wird. Dies erreicht man durch die Solltrajektorie

$$\bar{y}_1(t) = 0,0015 \frac{\text{m}}{\text{s}^5} \cdot t^4 - 0,06 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot t^3 + 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t^2. \quad (3.183)$$

Beliebige Polynome vierter Ordnung können durch ein Exosystem mit

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.184a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.184b)$$

erzeugt werden. Da keine Störungen vorliegen, gilt  $\mathbf{E}_d = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$ .

Außer für spezielle Anfangswerte wird die generierte Solltrajektorie über einen unendlichen Horizont unbeschränkt sein, wie es für (3.183) zutrifft. Die Annahme 3.3 ist somit nicht erfüllt. Aus dem Gegenbeispiel in Abschnitt 3.4.6 ist bekannt, dass in einem solchen Fall nicht zu erwarten ist, dass eine Lösung, die die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllt, auch überholend optimal ist. Da jedoch alle Eigenwerte des Exosystems  $\Re\{\bar{\lambda}\} = 0$  erfüllen, wird unter Annahme 3.2 in jedem Fall die Eigenwertbedingung (3.116) des Satzes 3.7 eingehalten. Der Kandidat  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  aus Satz 3.1, S. 71, der die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllt, ist daher ein Agreeable Plan. Ist der Horizont hinreichend lang, dann approximiert  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  in diesem Sinne die optimale Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$ . Ist folglich eine möglichst einfach zu implementierende Regelung zur effizienten Nutzung der überschüssigen Stellgrößen gesucht, so kommt  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  infrage.

Bis auf das Folgen der Solltrajektorie  $\bar{y}_1(t)$  gibt es allerdings noch weitere Kriterien zu beachten. Der Hubschrauber soll bei dem Manöver möglichst geradeaus fliegen und die Geschwindigkeitsänderung sollte möglichst in horizontaler Richtung der Interiakkoordinaten erfolgen. Daraus leitet sich ab, dass die Abweichungen des Nickwinkels  $x_4 = \theta$  und des Gierwinkels  $x_9 = \psi$  sowie der vertikalen Geschwindigkeit  $x_2 = v_z$  und der lateralen  $x_5 = v_y$  von null möglichst gering bleiben sollten. Diese Anforderungen können durch eine zusätzliche Zustandsgewichtung ohne Weiteres beim Reglerentwurf mittels des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  berücksichtigt werden. Um die Entwurfsgleichungen aus Satz 3.1, S. 71, direkt nutzen zu können, kann der Ausgang um die bisher nicht berücksichtigten Zustände als zusätzliche Hilfsausgänge ergänzt werden:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \theta \\ v_y \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (3.185)$$

Analog wird die Ausgangsmatrix  $\bar{\mathbf{C}}$  des Exosystems um vier Nullzeilen erweitert. Um der Solltrajektorie (3.183) durch  $x_1 = v_x$  möglichst genau zu folgen und gleichzeitig die weiteren Anforderungen an die Zustände zu berücksichtigen, werden die Gewichtungsmatrizen des Gütefunktional  $J_{0,T}(\cdot)$  in (3.3) zu

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10000, 1, 500, 1, 500), \quad (3.186a)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(0,328281, 32,8281, 32,8281, 32,8281) \quad (3.186b)$$

gewählt. Die unterschiedliche Größe der Zustandsgewichtungen der Winkel im Vergleich zu den Geschwindigkeiten ist durch die unterschiedliche Größenordnung infolge der Einheiten  $\text{rad}$  und  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  begründet. In  $\mathbf{R}$  wird der Anstellwinkel der Hauptrotoren  $u_1$  gegenüber den anderen Stellgrößen um den Faktor hundert geringer gewichtet, um diesen für die Beschleunigung bzw. Verzögerung des Hubschraubers bevorzugt zu verwenden. Für die Gewichtungen (3.186) ist die Annahme 3.2 erfüllt und die mittels Satz 3.1 bestimmte eindeutige Regelung  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  hat die gleiche Struktur (3.179) wie im ersten Szenario. Die Matrizen  $\mathbf{K}^*$ ,  $\mathbf{\Pi}_x^*$  und  $\mathbf{F}^*$  sind Anhang G.1.2 zu entnehmen.

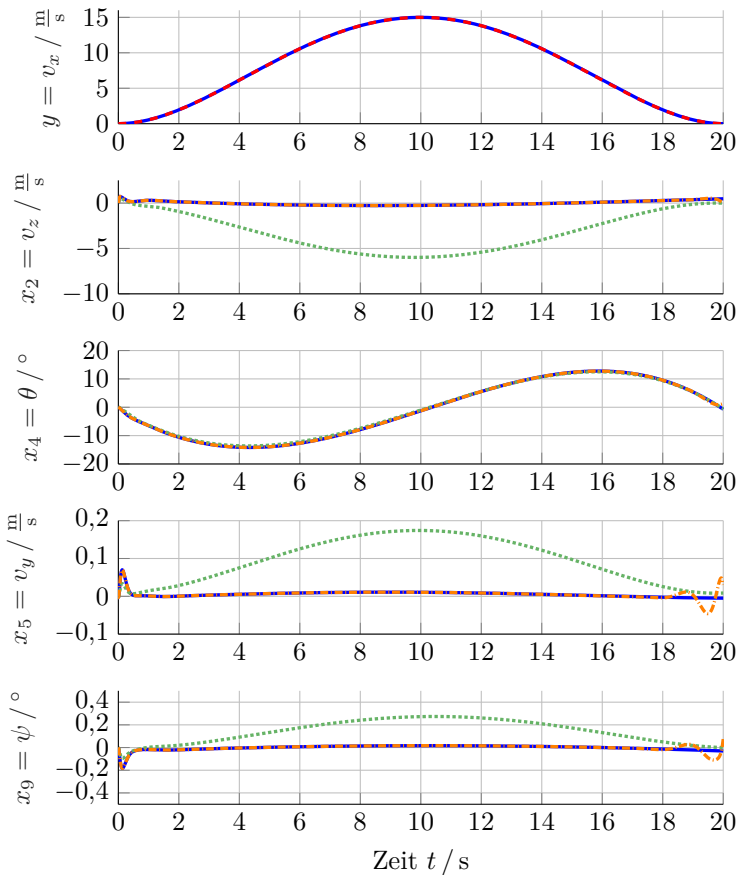
Es stellt sich die Frage, ob nach Einführung der künstlichen Ausgänge noch von der Regelung eines überaktuierten Helikopters gesprochen werden kann. Schließlich ist der Rang der ergänzten Ausgangsmatrix gleich fünf und somit größer als der Rang der Eingangsmatrix. Jedoch wird durch  $\mathbf{Q}$  allein der Folgefehler  $y_1(t) - \bar{y}_1(t)$  sehr hoch gewichtet, sodass nur die Längsgeschwindigkeit  $x_1 = v_x$  ihrer Solltrajektorie  $\bar{y}_1$  quasi exakt folgen wird. Die künstlichen Folgefehler werden hingegen teilweise feststellbar von null abweichen, was zeigt, dass demgegenüber die Einsparung der Stellenergie eine höhere Priorität erhält. Die Möglichkeit, sowohl Über- als auch Unteraktuierung zu handhaben sowie zusätzliche Anforderungen flexibel berücksichtigen zu können, belegt die Anpassungsfähigkeit des eingeführten Ansatzes einer optimalen Folgeregelung über unendliche Horizonte. Insbesondere für die praktische Anwendung ist dies vorteilhaft.

Zum Vergleich wird für die betrachtete Länge  $T = 20\text{s}$  des Manövers auch die optimale Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  des Problems OFP<sub>T</sub>3.1 wie in Abschnitt 2.4.1 implementiert. Außerdem wird ein Regelgesetz  $\mathbf{u}^{\text{OP}}(\cdot)$  der gleichen Struktur wie  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  entworfen, das jedoch die Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^{\text{OP}}, \mathbf{F}^{\text{OP}})$  des statischen Optimierungsproblems 3.1, S. 116, statt des Paares  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  verwendet. Die beiden unterscheiden sich, da die Aussage des Satzes 3.8 für das gegebene Exosystem nicht mehr zutrifft. Das zugehörige Minimum zum statischen Optimierungsproblem 3.1 beträgt 2,548 und ist niedriger als der Wert 2,715 der Gütefunktion für  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$ . Die Matrizen  $\mathbf{\Pi}_x^{\text{OP}}$  und  $\mathbf{F}^{\text{OP}}$  sind im Anhang G.1.2 zu finden.

Um die Solltrajektorie (3.183) zu generieren, wird das Exosystem mit

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = [0 \quad 0 \quad 1,2 \quad -0,36 \quad 0,036]^\text{T} \quad (3.187)$$

initialisiert. Das System befindet sich zu Beginn in Ruhe  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Die Abbildung 3.10 zeigt die Zustände  $v_z(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $v_y(t)$  und  $\psi(t)$  für die drei Regelgesetze  $\mathbf{u}^*(t)$  (—),  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  (---) und  $\mathbf{u}^{\text{OP}}(t)$  (---). Da der Verlauf des



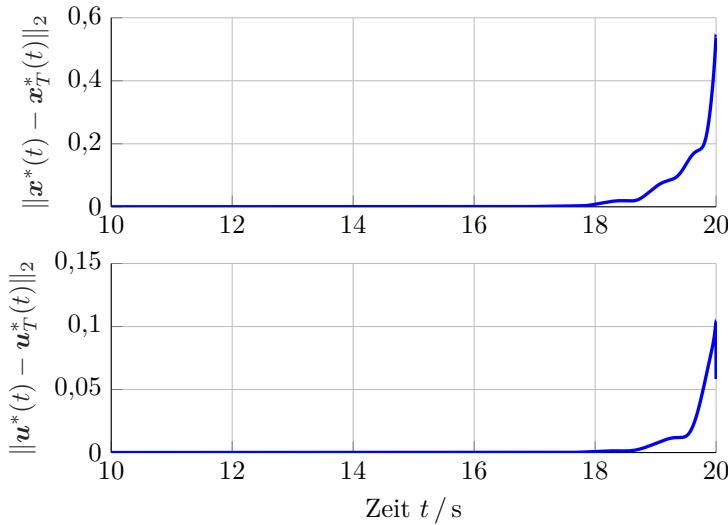
**Abbildung 3.10:** Darstellung des Ausgangs  $y_1$  (—) und der Solltrajektorie  $\bar{y}_1$  (---) sowie weiterer Zustände für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—),  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  (---) und  $\mathbf{u}^{\text{OP}}(t)$  (---).

Ausgangs  $y_1(t) = v_x(t)$  für alle drei Regelgesetze quasi deckungsgleich ist, wird dieser nur für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—) dargestellt. Infolge der sehr hohen Gewichtung durch  $Q_{11} = 10000$  folgt  $v_x$  für alle drei Regelungen der Solltrajektorie  $\bar{y}_1$  (---) nahezu exakt.

Für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—) nehmen die Quergeschwindigkeit  $v_y(t)$  und der Gierwinkel  $\psi(t)$  nur sehr geringe Werte an, was zeigt, dass der gewünschte Geradeausflug durch die Zustandsgewichtung erreicht wird. Auch bleibt



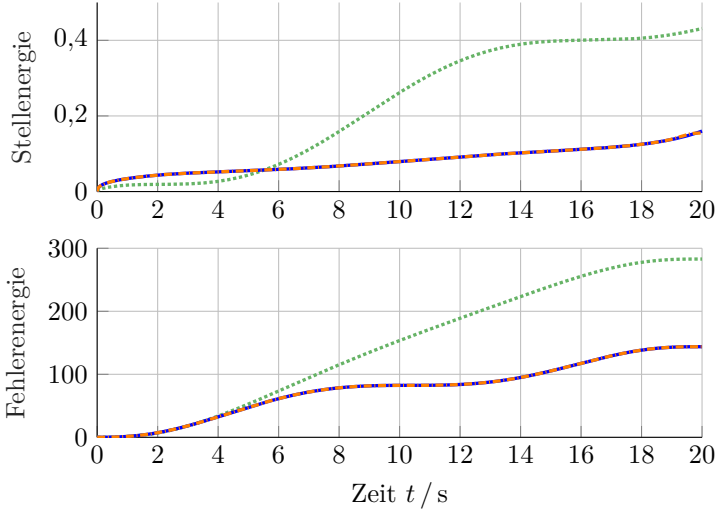
die Sinkgeschwindigkeit  $v_z(t)$  in Richtung der vertikalen Achse des Helikopters nahe bei null. Bei der Betrachtung des Nickwinkels  $\theta(t)$  fällt auf, dass sich die Nase des Helikopters während des Beschleunigens um bis zu  $\theta(4,34\text{ s}) \approx -14,18^\circ$  nach unten neigt und während des Verzögerns um bis zu  $\theta(15,88\text{ s}) \approx 12,77^\circ$  nach oben. Dass dies jedoch keine nennenswerte Auswirkung auf die Längsgeschwindigkeit  $v_x^I$  im Inertialkoordinatensystem hat, ist anhand des Zusammenhangs  $v_x^I \approx \cos(\theta)v_x$  und z. B.  $\cos(-14,18^\circ) \approx 0,97$  nachvollziehbar. Dahingegen führt es auf moderate Sinkgeschwindigkeiten  $v_z^I$  im Inertialkoordinatensystem, die im Bereich von ca.  $\pm 2,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  liegen.



**Abbildung 3.11:** Abweichungen der Zustände und Stellgrößen.

Im Vergleich zur optimalen Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  für  $T = 20\text{ s}$  (---) können nur für  $v_y(t)$  sowie  $\psi(t)$  und auch erst am Ende des Zeitintervalls relevante Unterschiede beobachtet werden. Da die Eigenwertbedingungen in Satz 3.4 eingehalten werden, ist dieses Verhalten mittels der Ungleichungen (3.91) zu erklären, wobei  $\alpha = 2,07$  gewählt werden kann. Hierzu zeigt die Abbildung 3.11 das zu erwartende konvergente Verhalten rückwärts in der Zeit. Die Abbildung 3.12 stellt dar, dass sich weder die Stellenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \, d\tau$ , noch die Energie des Folgefehlers  $\frac{1}{2} \int_0^t (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \, d\tau$  nennenswert von denen des Agreeable Plan  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  unterscheiden.

Für  $T = 20$  s resultieren für  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot))$  nur Mehrkosten von +0,04 gegenüber  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$ , was +0,03% entspricht. Im Gegensatz zum Beispiel 2.3 in Abschnitt 2.2.2, S. 28, besteht hier keine Notwendigkeit vom Agreeable Plan umzuschalten, stattdessen kann  $\mathbf{u}^*(t)$  über das ganze Intervall  $[0, 20]$  implementiert werden.



**Abbildung 3.12:** Darstellung der Stellenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \, d\tau$  und der Fehlerenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \, d\tau$  für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—),  $\mathbf{u}_T^*(t)$  (---) und  $\mathbf{u}^{\text{OP}}(t)$  (···).

Anders verhält es sich für  $\mathbf{u}^{\text{OP}}(t)$  (···). Während der Betrag von  $\theta(t)$  nur geringfügig kleiner gegenüber dem Verlauf für  $\mathbf{u}^*(t)$  ist (höchstens  $0,6^\circ$ ), nimmt der Helikopter Sinkgeschwindigkeiten von fast  $v_z \approx -6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  an. Nach der Transition führt dies während des restlichen Manövers dazu, dass der Helikopter mit Geschwindigkeiten von bis zu  $6,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ( $v_z^1 \approx -6,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) im Inertialkoordinatensystem steigt. Es ist nachzuvollziehen, dass dies eines wesentlich höheren Stellaufwands bedarf. So resultiert dies in einer mehr als doppelt so hohen Stellenergie am Ende des Intervalls, wie die Abbildung 3.12 belegt. Auch zeigt die Regelung  $\mathbf{u}^{\text{OP}}(t)$  Schwächen bei der Realisierung des Geradeausflugs durch Abweichungen von  $v_y(t)$  und  $\psi(t)$  von null. Gemeinsam mit den hohen Abweichungen von  $v_z(t)$  von null verursacht dies ebenfalls eine fast doppelt so hohe Energie des Folgefehlers. Insgesamt weist  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^{\text{OP}}(\cdot))$  Mehrkosten von +139,41 gegenüber  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  auf, was relativ +96,88% bedeutet. Der Reglerentwurf mit-

tels des statischen Optimierungsproblems 3.1 ist folglich für das betrachtete Beispiel ohne die Annahme 3.3 nicht geeignet.

Dahingegen kann als Fazit festgehalten werden, dass hier auch ohne die Annahme 3.3 die mittels der algebraischen Entwurfsgleichungen aus Satz 3.1 entworfene Regelung zu einer fast exakten Folgeregelung führt, die die bestmögliche Nutzung der überschüssigen Stellgrößen unter Einbezug zusätzlicher Anforderungen erreicht.

### 3.7.2 Unteraktuiertes System: Drei-Massen-Schwinger

Es wird der gedämpfte Drei-Massen-Schwinger aus Abbildung 3.13 betrachtet. Für die Position jeder Masse wird ein Sollverlauf vorgegeben. Gegenüber diesen  $p = 3$  Ausgängen stehen jedoch nur  $m = 2$  Aktoren zur Ausübung einer Kraft auf die äußeren Massen zur Verfügung, da der Aktor der mittleren Masse ausgefallen ist.

Mit dem Kräftesatz [75] werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Das resultierende lineare System hat  $n = 6$  Zustände und die zugehörigen Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sowie die Systemparameter sind im Anhang G.2.1 aufgeführt. Die Positionen der drei Massen bilden den Ausgang

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}. \quad (3.188)$$

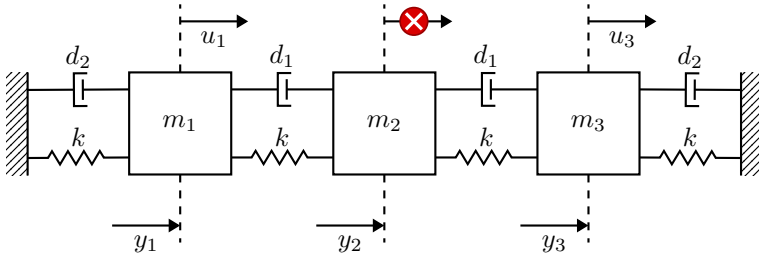
Infolge des Aktorausfalls ist das System unteraktuiert, da gilt:

$$\text{rang}(\mathbf{B}) = 2 < 3 = \text{rang}(\mathbf{C}). \quad (3.189)$$

Die Positionen  $x_1$ ,  $x_3$  sowie  $x_5$  haben die Einheit cm und die Geschwindigkeiten  $x_2$ ,  $x_4$  sowie  $x_6$  haben die Einheit  $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ . Die verbleibenden beiden Aktoren üben eine Kraft  $u_1$  und  $u_3$  in der Einheit cN ( $= 0,01 \text{ N}$ ) auf die äußere Masse  $m_1$  bzw.  $m_3$  aus.

Aufgrund der Unteraktuierung kann der Solltrajektorie

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + \frac{18^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \right) + 1 \right) \text{ cm} \\ 0 \\ \left( \pi \sin \left( \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t \right) + 0,5 \right) \text{ cm} \end{bmatrix} \quad (3.190)$$



**Abbildung 3.13:** Drei-Massen-Schwinger mit ausgefallenem Aktor.

nicht mehr durch die drei Ausgänge  $\mathbf{y}$  asymptotisch exakt gefolgt werden. Stattdessen ist es das Ziel, eine überholend optimale Lösung des Problems  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  mit dem Gütefunktional  $J_{0,T}(\cdot)$ , dessen Gewichtungsmatrizen

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(32, 60, 4) \quad (3.191a)$$

$$\mathbf{R} = \mu \mathbf{I}_2, \quad (3.191b)$$

mit  $\mu > 0$  sind, zu finden. Es hat die höchste Priorität, dass die Masse  $m_2$  in der Mitte in Ruhe verweilt, während die äußeren Massen ihren sinusoidalen Sollwerten folgen, wobei der Positionsverlauf der Masse  $m_1$  wiederum wichtiger ist als der der Masse  $m_3$ . Die Auswirkung einer niedrigeren Relevanz der Stellenergie wird untersucht, indem der Parameter  $\mu$  der Gewichtung  $\mathbf{R}$  entsprechend variiert wird:

$$\mu \in \{0,002; 0,05; 1\}. \quad (3.192)$$

Die gewünschte Solltrajektorie kann durch ein Exosystem (3.2) in der Standardform aus Abschnitt 3.6 generiert werden. Dessen Matrizen sind

$$\overline{\mathbf{A}} = \text{diag}\left(0, 0, \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}\right), \quad (3.193a)$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.193b)$$

Es liegen keine Störungen vor, weshalb  $\mathbf{E}_d = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$  gilt.

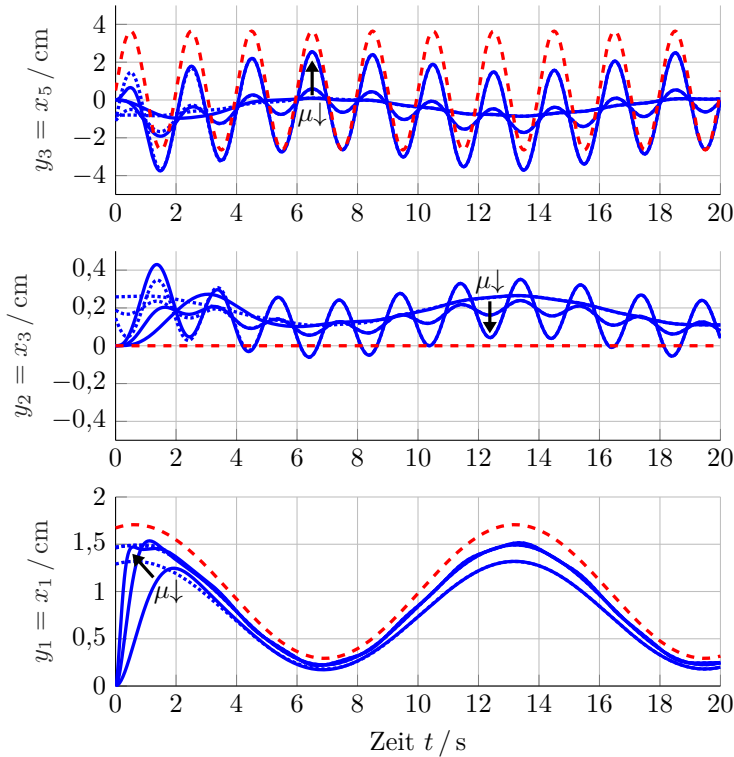
Da die Annahmen 3.1 bis 3.3 für jedes  $\mu$  aus (3.192) erfüllt sind, wird nach Satz 3.2, S. 75, die eindeutige überholend optimale Regelung  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  in der Form (3.179) mittels der algebraischen Entwurfsgleichungen aus

Satz 3.1, S. 71, in Abhängigkeit von  $\mu$  berechnet. Für  $\mu = 0,002$  sind die zugehörigen Matrizen  $\mathbf{K}^*$ ,  $\mathbf{\Pi}_x^*$  und  $\mathbf{F}^*$  im Anhang G.2.2 angegeben. Das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  löst nach Satz 3.8 auch das statische Optimierungsproblem 3.1, S. 116. Dessen Minimum ist 4,8051 für den Parameter  $\mu = 0,002$ .

Die drei überholend optimalen Regler werden in der Simulation analysiert. Das Exosystem erzeugt die Solltrajektorie (3.190) für

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \text{ cm} & 0,5 \text{ cm} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{18^\circ \cdot \pi}{180^\circ}\right) \text{ cm} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{18^\circ \cdot \pi}{180^\circ}\right) \text{ cm} & 0 & \pi \text{ cm} \end{bmatrix}^\top. \quad (3.194)$$

Der Drei-Massen-Schwinger startet in der Ruhelage  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .



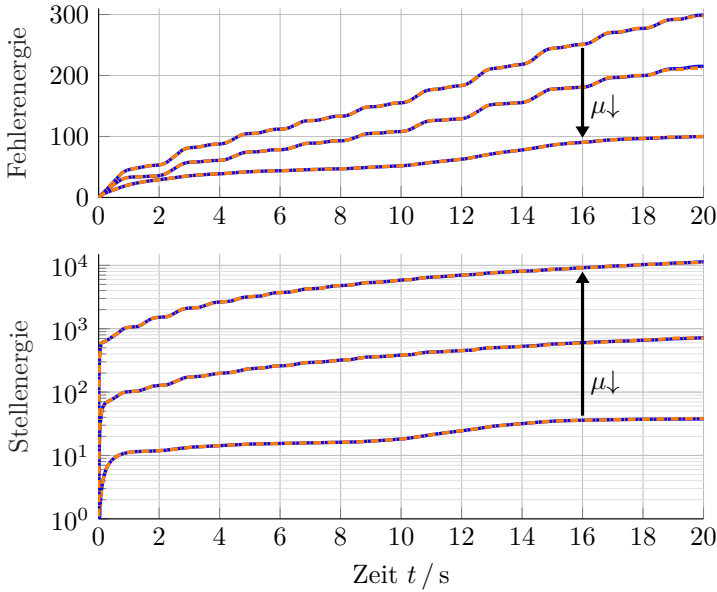
**Abbildung 3.14:** Darstellung der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  (---) und der Ausgänge  $\mathbf{y}$  (—) für  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  und abnehmendes  $\mu$  gemäß (3.192).

Die Abbildung 3.14 zeigt die drei Ausgänge für die verschiedenen  $\mathbf{u}^*(t)$  (—) und ihre jeweiligen Solltrajektorien (---) auf dem Intervall  $[0, 20\text{ s}]$ . Der Anordnung der Massen in Abbildung 3.13 und der definierten Vorzeichenrichtung entsprechend sind die Graphen zu den Positionen  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  und  $y_3(t)$  von unten nach oben aufgetragen. Diese zeigen die Konvergenz zu den stationären Verläufen  $\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  (⋯), die jeweils nach Korollar 3.1, S. 82, ein optimales stationäres Verhalten beschreiben und nach Satz 3.5, S. 100, die Turnpike zum jeweiligen Problem OFP<sub>T</sub>3.1 sind.

Bei Betrachtung der Ausgangsverläufe fällt auf, dass, gemessen an den verhältnismäßig hohen Amplituden von  $y_1(t)$  und  $y_3(t)$ , nur moderate Ausschläge von  $y_2(t)$  in Kauf genommen werden müssen.<sup>28)</sup> Da sowohl der Sollwert der Position der Masse  $m_1$  als auch der Masse  $m_3$  einen konstanten positiven Mittelwert aufweist, ist es nachvollziehbar, dass die Masse  $m_2$  im Mittel ebenfalls aus der Mitte nach rechts verschoben ist. Um diese Verschiebung  $y_2(t)$  innerhalb der zu beobachtenden Grenzen zu halten, arbeitet der Ausschlag  $y_3(t)$  der Masse  $m_3$  gegen den der Masse  $m_1$ . Dies ist besonders für  $t \approx 13,2\text{ s}$  zu sehen. Dann nimmt der Ausschlag  $y_1(t)$  ein Maximum an. Um dem entgegenzuwirken, weicht  $y_3(t)$  gleichzeitig besonders weit vom Sollwert  $\bar{y}_3(t)$  ab. Für die Ausgänge  $y_1(t)$  und  $y_3(t)$  zeigt die Abbildung, dass eine abnehmende Gewichtung  $\mu$  der Stellenergie damit einhergeht, dass der Ausgang dem Profil des Sollverlaufs genauer folgt. Für den Ausgang  $y_2(t)$  ist eine Abnahme des Mittelwerts des Folgefehlers zu erkennen.

Es ist daher nachzuvollziehen, dass mit sinkendem  $\mu$  die Energie des Folgefehlers  $\frac{1}{2} \int_0^t (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) d\tau$  ebenfalls abnimmt, wie auch die Abbildung 3.15 aufzeigt. Dies geht zu Lasten einer höheren Stellenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{u}^\top \mathbf{u} d\tau$ , bei der der Parameter  $\mu$  sinnvollerweise nicht einbezogen ist. Die Abbildung 3.15 zeigt im Vergleich die jeweiligen Kosten für die zugehörige eindeutige optimale Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  (---) für  $T = 20\text{ s}$  des Problems OFP<sub>T</sub>3.1, die wie im Abschnitt 2.4.1 entworfen wurde. Unabhängig vom Parameter  $\mu$  ist keine nennenswerte Kosteneinsparung zu erkennen, auch nicht am Intervallende. So enthält  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}^*(\cdot))$  für  $\mu = 0,002$  nur Mehrkosten von +0,45 gegenüber  $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}_T^*(\cdot))$ , was in Relation nur +0,37% entspricht. Die Fehlerenergie für  $\mu = 0,002$  unterscheidet sich um -0,09169 bzw. -0,09173% am Intervallende und fällt sogar niedriger für  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  als für  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  aus. Dies ist durch die Transversalitätsbedingung (2.66b) in Abschnitt 2.3.2 begründet, wegen der die optimale Lösung

<sup>28)</sup> Dabei ist zu beachten, dass in Abbildung 3.14 die Achsen zu den drei Graphen unterschiedlich skaliert sind.

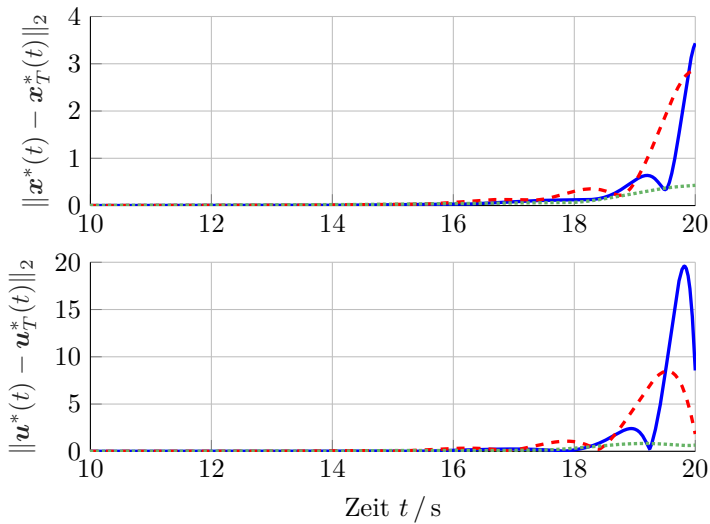


**Abbildung 3.15:** Zeigt die Stellenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \, d\tau$  (ohne Gewichtung durch  $\mu$ ) und die Fehlerenergie  $\frac{1}{2} \int_0^t (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \, d\tau$  für  $\mathbf{u}^*(t)$  (—) und  $\mathbf{u}_T^*(t)$  (---) für abnehmendes  $\mu$  gemäß (3.192).

$(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  am Intervallende das Einsparen der Stellenergie gegenüber der Fehlerenergie priorisiert.

Das beobachtete günstige Verhalten ist wieder durch den Satz 3.7 nachzuvollziehen, nach dem die überholend optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  ein Agreeable Plan zum Problem OFP<sub>T</sub>3.1 ist. Im vorliegenden Fall wird jedoch das Umschalten gemäß Definition 2.7 wohl nicht notwendig sein. Hierzu illustriert auch die Abbildung 3.16, wie die Abweichungen zwischen der überholend optimalen Lösung und der optimalen Lösung auf dem endlichen Intervall rückwärts in der Zeit gegen null konvergieren. Ursächlich hierfür ist das Ergebnis (3.91) des Satzes 3.4, S. 97.

Man kommt zu dem Schluss, dass es mittels des Entwurfsverfahrens aus Abschnitt 3.4.1 möglich ist, eine überholend optimale Folgeregelung einfacher Struktur (3.179) zu implementieren, die im Falle der Unteraktuierung fast das optimale Folgeverhalten auf Basis des gegebenen Gütemaßes  $J_{0,T}(\cdot)$  aufweist. Dass für  $\mu = 0,002$  das Regelgesetz  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  beinahe das



**Abbildung 3.16:** Abweichungen der Zustände und Stellgrößen für  $\mu = 0,002$  (—),  $\mu = 0,05$  (---) und  $\mu = 1$  (····).

bestmögliche stationäre Folgeverhalten unter der Gewichtung  $\mathbf{Q}$  erreicht, wird aus Kapitel 4 hervorgehen.

### 3.8 Fazit mit Übersicht der Hauptresultate

Im Fokus dieses Kapitels stand das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{\infty} 3.1$  über unendliche Horizonte. Es wurde belegt, dass dessen Lösung als einheitliches Verfahren zum Reglerentwurf für quadratische, überaktuierte und unteraktuierte lineare Systeme geeignet ist. Die einfach zu implementierende Zwei-Freiheitsgrade-Struktur der optimalen Regelung ermöglicht sowohl die optimale Nutzung der zusätzlichen Freiheitsgrade von überaktuierten Systemen als auch das Erreichen eines optimalen Folgeverhaltens für unteraktuierte Systeme. Die Tabelle 3.1 gibt eine Übersicht der Zusammenhänge, die im Anschluss erläutert werden, und fasst die relevanten Gleichungen zum Entwurf zusammen. Abschließend wird aufgezeigt, wie mithilfe dieser Ergebnisse neue Beiträge zu aktuellen Forschungsfeldern geliefert werden konnten.



**Tabelle 3.1:** Übersicht zu den Hauptresultaten aus Satz 3.1 (S. 71), Satz 3.2 (S. 75), Satz 3.7 (S. 106) und Satz 3.8 (S. 120).

Lineares zeitinvariantes, stabilisierbares System mit Störgrößen	Zeitinvariantes Exosystem generiert Soll- und Störgrößen
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}}$ $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}}$	$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$ $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}$
Gütefunktional mit konstanten Gewichtungen $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ und $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$ (für $\mathbf{Q}_{1/2}^\top \mathbf{Q}_{1/2} = \mathbf{Q}$ sei $(\mathbf{Q}_{1/2}\mathbf{C}, \mathbf{A})$ entdeckbar): $J_{0,T}(\cdot, \mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}\mathbf{u}) dt$	
Zeitinvariantes Regelgesetz in Zwei-Freiheitsgrade-Struktur	
$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}(\mathbf{x}^*(t) - \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(t)$	
entworfen mittels algebraischer Riccatigl. und neuer Sylvestergl.	
$\mathbf{0} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}\mathbf{C},$ $\begin{bmatrix} \Pi_x^* \\ \Pi_\phi^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_x^* \\ \Pi_\phi^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix}.$	
Eigenschaften für alle beliebigen Anfangswerte $\mathbf{x}_0$ und $\bar{\mathbf{x}}_0$	
1. Für beschränkte Soll- und Störgrößen ist die Lösung $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ überholend optimal über einen unendlichen Horizont $T \rightarrow \infty$ und sie strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen das optimale stationäre Verhalten $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ .	
2. Diese Lösung ist ein Agreeable Plan und approximiert die optimalen Lösungen über hinreichend lange endliche Horizonte, falls die Eigenwertbedingung $\Re\{\lambda\} + \Re\{\bar{\lambda}\} < 0$ für alle $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$ mit $\Re\{\bar{\lambda}\} \geq 0$ und $\lambda \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})$ gilt.	
3. Ohne Einschränkungen anwendbar für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme.	
4. Das Paar $(\Pi_x^*, -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \Pi_\phi)$ löst eindeutig das statische Optimierungproblem 3.1, S. 116, falls $\bar{\mathbf{A}}$ schiefssymmetr. ist.	

Die Ergebnisse dieses Kapitels bilden eine umfassende theoretische Analyse der Eigenschaften der gefundenen Regelung. Hierzu gehören ein einfacher Entwurf mittels hergeleiteter algebraischer Gleichungen, zu denen eine neue lineare Sylvestergleichung gehört, und ein neuer, formal erbrachter Nachweis von starken Optimalitätseigenschaften unter den schwächsten gängigen Annahmen. Diese implizieren, dass jede andere Regelung, die zu einem verschiedenen stationären Verhalten führt, mit zunehmender Zeit immer höhere, letztendlich divergierende zusätzliche Kosten erzeugt.

Für unbeschränkte Soll- oder Störgrößen wurde dargelegt, dass im Allgemeinen gar keine optimale Lösung zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  existiert. Unter gängigen Voraussetzungen kann mittels der hergeleiteten Entwurfsgleichungen dennoch eine sinnvolle Regelung bestimmt werden. Denn es wurde erstmalig gezeigt, dass sie auf einen Agreeable Plan führt und somit die optimalen Regelungen des Problems  $\text{OFP}_T 3.1$  über endliche Horizonte approximiert. Durch eine qualitative Faustregel lies sich nachvollziehen, dass niedrige Zeitkonstanten des geschlossenen Regelkreises eine hohe Güte dieser Approximation indizieren.

Gerade für eine praktische Anwendung ist es sehr vorteilhaft, dass alle diese Eigenschaften für beliebige Anfangswerte des Systems sowie des Exosystems und somit für alle Störungen und Solltrajektorien, die durch das Exosystem generiert werden können, bewiesen wurden.

Abschließend ist besonders hervorzuheben, dass durch die erarbeitete Theorie eine Grundlage geschaffen wurde, um mithilfe der erzielten Ergebnisse unterschiedlichste Problemstellungen zu lösen. So konnte erstmals für das statische Optimierungsproblem 3.1, das in ähnlicher Form häufiger bei überaktuierten Systemen verwendet wird, nachgewiesen werden, dass dessen Lösung tatsächlich zu einem optimalen stationären Verhalten des zugehörigen Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  führt. Auf dieser Basis konnte auch die Berücksichtigung vorgegebener Schranken für den Folgefehler ergänzt werden.

Weitere Anwendungen der hergeleiteten Methoden aus diesem Kapitel wurden im Rahmen von Veröffentlichungen präsentiert:

1. Statische optimale Entkopplungsregelung mit zeitlich veränderlichen Solltrajektorien für überaktuierte lineare Systeme [25].
2. Optimale stationäre Synchronisierung von heterogenen linearen Multi-Agenten-Systemen als Alternative zur herkömmlichen exakten Synchronisierung und zur Einbeziehung von über- und unteraktuierten Agenten [21].

3. Optimale linear-quadratische Folgeregelung für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme ohne Kenntnis der Systemdynamik und der Dynamik des Exosystems (unbekannte Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}_d$  und  $\overline{\mathbf{A}}$ ) [28].

Wegen des aktuell großen Interesses an datenbasierten Verfahren zur Ermittlung optimaler Regelungen für unbekannte Systeme wird auf den letztgenannten Punkt exemplarisch eingegangen.

Datenbasierte Verfahren für lineare Systeme und quadratische Gütefunktionale gehen auf die Bestimmung des linear-quadratischen Reglers für eine unbekannte Systemmatrix  $\mathbf{A}$  [161] und eine zusätzlich unbekannte Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  [98] zurück. Abgesehen von Methoden zur Bestimmung exakter Folgeregelungen [69, 70], die keine unteraktuierten Systeme berücksichtigen können, wurden zur Bestimmung optimaler Folgeregelungen für ein Problem wie  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  die Methoden aus [98, 161] in [127, 134] nur unwesentlich erweitert. Die Verfahren von [127, 134] basieren daher auf einer Bestimmung der optimalen Kosten mittels der Lösung der algebraischen Riccatigleichung durch den iterativen *Kleinman*-Algorithmus [105]. Deswegen müssen beide Ansätze [127, 134] strenge Anforderung stellen, um zu garantieren, dass die optimalen Kosten trotz unendlichen Horizontes endlich sind. Dies erfordert z. B. ein asymptotisch stabiles Exosystem in [134].

Mithilfe der hier hergeleiteten Entwurfsgleichungen kann das datenbasierte Verfahren aus [98] wesentlich weiterentwickelt werden. Dies zeigen die Ergebnisse der Veröffentlichung [28], die auch in [26] präsentiert wurden. So ist es möglich, unter den selben schwachen Annahmen wie in diesem Kapitel, eine Regelung zum Problem  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  zu bestimmen, selbst wenn die Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}_d$  und  $\overline{\mathbf{A}}$  unbekannt sind. Diese Regelung weist alle hier bewiesenen Eigenschaften auf.

Nicht zuletzt wurden hier Grundlagen für das nächste Kapitel gelegt. In diesem wird unter anderem die Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  mit modifizierten Gewichtungen  $\rho \mathbf{Q}$  und  $\mu \mathbf{R}$  einer Grenzwertbetrachtung  $\rho \rightarrow \infty$  bzw.  $\mu \rightarrow 0$  unterzogen. Durch diese Grenzwertbetrachtung ist es auf Basis der in diesem Kapitel hergeleiteten neuen linearen Sylvestergleichung möglich, die im nächsten Kapitel vorgestellte optimale Output Regulation als Sonderfall einer optimalen Folgeregelung einzuordnen. Damit wird dann sowohl die optimale als auch die klassische Output Regulation Theorie in die Theorie optimaler Folgeregelungen eingebettet.

## 4 Optimale Output Regulation für quadratische, über- und unteraktuierte lineare Systeme

In diesem Kapitel wird das Verfahren der Output Regulation betrachtet, das zum Entwurf exakter Folgeregelungen eingesetzt wird. Es werden neue Erweiterungen des Verfahrens für über- und unteraktuierte Systeme eingeführt. Hierzu wird jeweils ein optimales Output Regulation Problem formuliert. Für überaktuierte Systeme nutzt dessen Lösung die zusätzlichen Freiheitsgrade zur Reduzierung der Stellenergie. Für unteraktuierte Systeme existiert dagegen für gewöhnlich gar keine exakte Folgeregelung. Die Lösung des Problems erlaubt es dahingehend, das bestmögliche Folgeverhalten zu erreichen. Zur Bestimmung der Regelgesetze werden neue Regulatorgleichungen hergeleitet. Die Lösungen können damit für über- bzw. unteraktuierte Systeme genauso unkompliziert berechnet werden wie für quadratische Systeme. Außerdem wird gezeigt, dass das klassische Output Regulation Problem für quadratische Systeme nichts anderes als ein Sonderfall eines optimalen Folgeregelungsproblems ist. Dieses Kapitel wurde weitestgehend bereits in [29] veröffentlicht.

### 4.1 Problemstellungen und Annahmen

Wie zuvor wird das zeitinvariante lineare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}}, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (4.1b)$$

betrachtet, wobei der Zustand  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  mit gegebenem Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , die Stellgröße  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  und der Ausgang  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  für alle  $t \in [0, \infty)$  definiert sind. Ein Durchgriff  $\mathbf{D}\mathbf{u}$  der Stellgröße  $\mathbf{u}$  auf den

Ausgang  $\mathbf{y}$  wird noch in der Diskussion in Abschnitt 4.5 berücksichtigt. Zunächst sei  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . Die Störungen  $\mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}$  sowie  $\mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}}$  und auch die Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  werden wieder durch das Exosystem

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}, \quad (4.2a)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \quad (4.2b)$$

erzeugt. Dessen Zustand ist  $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  mit dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$ . Es wird in der Regel in einer blockdiagonalen Form vorliegen, wobei jeweils ein Block die Dynamik der Soll- bzw. Störgrößen repräsentiert.

Im Rahmen der linearen Output Regulation wird das Ziel verfolgt, eine lineare Regelung zu entwerfen, sodass der Ausgang  $\mathbf{y}$  des Systems der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  asymptotisch folgt. Dies führt zu dem klassischen

**Output Regulation Problem: ORP 4.1.** Finde Matrizen  $\mathbf{\Pi}_x \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$  und  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sodass durch die Regelung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}\bar{\mathbf{x}} \quad (4.3)$$

der geschlossene Regelkreis mit der Systemmatrix  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  asymptotisch stabil ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

für jedes  $\mathbf{x}_0$  und jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  zutrifft.

Das Regelgesetz ist durch eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, wie in Abbildung 3.3 in Abschnitt 3.4.1, festgelegt. Eine Regelung, die das Output Regulation Problem löst, hat daher dieselbe Struktur wie eine überholend optimale Regelung aus Kapitel 3.

Die Wahl der Matrizen  $\mathbf{\Pi}_x$  und  $\mathbf{F}$  ist zur Lösung des Problems essentiell. Es sei die folgende Standardannahme erfüllt:

**Annahme 4.1.** Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist stabilisierbar.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe jeder Eigenwert von  $\bar{\mathbf{A}}$  einen nichtnegativen Realteil.<sup>1)</sup> Unter diesen Annahmen gilt das z. B. aus [155, Kapitel 9] bekannte Resultat, das auf [63] zurückgeht: Es ist genau dann möglich, das Problem ORP 4.1 durch eine lineare Regelung<sup>2)</sup> wie

<sup>1)</sup>Siehe hierzu die Diskussion zur Annahme 3.3 in Abschnitt 3.1, S. 61.

<sup>2)</sup>Das Resultat gilt auch, falls die Regelung um eine lineare Dynamik erweitert wird, siehe [155, Kapitel 9]. Hierbei kann es sich z. B. um einen Zustands- oder Störgrößenbeobachter handeln, wenn entsprechende Voraussetzungen zur Beobachtbarkeit erfüllt sind, siehe auch Bemerkung 3.3, S. 73.

(4.3) zu lösen, wenn ein Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  existiert, das die *klassischen Regulatorgleichungen*

$$(\mathcal{RG}) \quad \begin{cases} \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{B} \mathbf{F} + \mathbf{E}_d, & (4.5a) \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{D}_d & (4.5b) \end{cases}$$

löst. Wie in Bemerkung 3.2 in Abschnitt 3.4.1 diskutiert, genügt es, das System (4.1) durch eine beliebige Rückkopplung  $-\mathbf{K}\mathbf{x}$  zu stabilisieren, damit der Zustand  $\mathbf{x}(t)$  in seinen *stationären Zustand*<sup>3)</sup>  $\mathbf{x}_s(t) := \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(t)$  übergeht:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) - \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

Dieser wird durch den *stationären Stellgrößenvektor*  $\mathbf{u}_s(t) := \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t)$  aus (4.3) und die Störungen  $\mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}$  in (4.1a) beeinflusst. Mit Bezug auf das Exosystem (4.2a) ist folglich  $(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))$  ein *stationäres Verhalten* zur Dynamik (4.1a), falls das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  die Sylvestergleichung (4.5a) erfüllt. Erfüllt das Paar zusätzliche die zweite Bedingung (4.5b), dann konvergiert der Folgefehler  $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$  gegen den Nullvektor, da der Ausgang im stationären Zustand  $\mathbf{y}_s$  keinen Folgefehler aufweist:

$$\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}} \quad (4.7)$$

$$= (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Die Diskussion impliziert, dass die Lösbarkeit der Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  ein hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit des Problems ORP 4.1 ist. Das sie auch notwendig ist, ist z. B. in [63, 95, 140, 155] nachzulesen.

In Hinblick auf die Lösbarkeit der Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  und damit die Existenz einer Lösung des Problems ORP 4.1 motivieren zwei offene Fragen die Ausführungen dieses Kapitels:

- F1) Angenommen die Lösung der klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  ist nicht eindeutig. Welche Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  sollte gewählt werden, damit die stationäre Regelung  $\mathbf{u}_s(\cdot)$  möglichst effizient bezüglich der benötigten Stellenergie ist?
- F2) Falls die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  nicht lösbar sind, für welche stationäre Regelung  $\mathbf{u}_s(\cdot)$  ist dann die Energie des stationären Folgefehlers  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}$ , der im Allgemeinen nicht identisch null sein kann, möglichst gering?

<sup>3)</sup>Die Matrix  $\mathbf{\Pi}_x$  ermöglicht es, alle möglichen partikulären Lösungen  $\mathbf{x}_s(\cdot)$  der Systemdynamik (4.1a) infolge der inhomogenen Anregung  $(\mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{E}_d)\bar{\mathbf{x}}$  zu parametrisieren. Vergleiche hierzu den Ansatz vom Typ der rechten Seite in Abschnitt 3.4.1, S. 70.

Die Frage F1) stellt sich, wenn das System 4.1 überaktuiert ist und daher

$$\text{rang}(\mathbf{B}) > p \quad (4.9)$$

vorliegt.<sup>4)</sup> Selbstverständlich ist man dann an einer Lösung des Problems ORP 4.1 interessiert, die die zusätzlichen Stellgrößen vorteilhaft nutzt. Mit der Frage F2) wird man konfrontiert, falls das Problem ORP 4.1 nicht lösbar ist und stationäre Folgefehler unvermeidlich sind. Dies trifft typischerweise für unteraktuierte Systeme (4.1) zu, für die

$$\text{rang}(\mathbf{B}) < p \quad (4.10)$$

gilt. Diese offenen Fragen werden nun als zwei optimale Output Regulation Probleme formuliert. Sie stellen sinnvolle Ziele für den Entwurf von Folgeregelungen für über- bzw. unteraktuierte Systeme dar.

Mit Bezug zur offenen Frage F1) stellt sich ein

**Optimales Output Regulation Problem: OORP 4.1.** Finde ein Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$ , sodass  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  ein stationäres Verhalten zur Dynamik (4.1a) ist, das für *jeden* Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  den quadratischen Mittelwert

$$QMW^u(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} J_T^u(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) \right) \quad (4.11)$$

mit der stationären Stellenergie

$$J_T^u(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{u}_s(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_s(t) \, dt \quad (4.12)$$

für eine symmetrische, positiv definite Gewichtungsmatrix  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  minimiert, wobei die Nebenbedingung

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(t), \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (4.13)$$

für eine exakte Folgeregelung einzuhalten ist.

<sup>4)</sup>Dabei wird implizit von  $\text{rang}(\mathbf{C}) = p$  ausgegangen, um die Existenz einer exakten Folgeregelung im Allgemeinen sicherzustellen. Dies wird jedoch nicht weiter vorausgesetzt. Siehe hierzu auch Fußnote 1) zu Definition 2.1, S. 12.

In Hinblick auf die offene Frage F2) formuliert man ein

**Optimales Output Regulation Problem: OORP 4.2.** Finde ein Paar  $(\Pi_x^y, \mathbf{F}^y)$ , sodass  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  ein stationäres Verhalten zur Dynamik (4.1a) ist, das für *jeden* Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  den quadratischen Mittelwert

$$QMW^y(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) := \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} J_T^y(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) \right) \quad (4.14)$$

mit der stationären Folgefehlerenergie

$$J_T^y(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) := \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)) dt \quad (4.15)$$

mit der symmetrischen, positiv definiten Gewichtung  $\mathbf{Q}$  minimiert.

Die Forderung  $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$  stellt keine Einschränkung dar, sondern dient lediglich einer übersichtlichen Präsentation in diesem Kapitel.<sup>5)</sup>

Beide optimalen Output Regulation Probleme können als spezielle optimale Folgeregelungsprobleme aufgefasst werden. Im Unterschied zu den in Kapitel 2 und 3 betrachteten optimalen Folgeregelungsproblemen wird hier jedoch die Definition 2.2 der bisher zulässigen Lösungen wie folgt eingeschränkt:

**Definition 4.1** (Zulässige Lösung). Jedes stationäre Verhalten

$$(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)) = (\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t)) \quad (4.16)$$

zur Dynamik (4.1a), wobei das Paar  $(\Pi_x, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}} \times \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$  die Sylvester-Gleichung (4.5a) löst, ist zulässig.

Unter der Standardannahme 4.1 zur Stabilisierbarkeit ist die Lösung des klassischen Problems ORP 4.1 im Wesentlichen von der Wahl des stationären Verhaltens abhängig. Aus diesem Grund sind in den Problemen

<sup>5)</sup> Jede symmetrische Gewichtung  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  lässt sich zu  $\mathbf{Q} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{T}^T$  zerlegen, wobei die Diagonalmatrix  $\hat{\mathbf{Q}} = \text{diag}(\hat{\mathbf{Q}}_1, \mathbf{0}) \succeq \mathbf{0}$  die positiven Eigenwerte von  $\mathbf{Q}$  auf der Diagonalen in  $\hat{\mathbf{Q}}_1 \succ \mathbf{0}$  aufweist und die zugehörigen Spalten  $\mathbf{T}_1$  von  $\mathbf{T}$  deren Eigenvektoren sind. Die Problemstellung mit  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  und den Ausgangsmatrizen  $\mathbf{C}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  sowie der Störmatrix  $\mathbf{D}_d$  ist daher äquivalent zum Problem mit positiv definiter Gewichtung  $\hat{\mathbf{Q}}_1$  und den Matrizen  $\mathbf{T}_1^T \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{C}}$  sowie  $\mathbf{T}_1^T \mathbf{D}_d$ . Auf diesem Weg können alle in diesem Kapitel erzielten Verfahren auch für Probleme mit  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  angewendet werden.



OORP 4.1 und 4.2 die zulässigen Lösungen der Definition 4.1 entsprechend eingeschränkt. Im Unterschied zu Kapitel 3, wo allgemeinere Lösungen nach Definition 2.2 zulässig waren, ist es hier daher völlig hinreichend, den quadratischen Mittelwert als Gütefunktional heranzuziehen. Im Rahmen der optimalen Output Regulation ist die Verwendung des quadratischen Mittelwertes auch in der Literatur üblich, siehe z. B. [50, 126, 140]. Die Probleme OORP 4.1 und OORP 4.2 sind nur dann sinnvoll formuliert, wenn auch der Grenzwert (4.11) bzw. (4.14) für wenigstens ein zulässiges Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  und für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  existiert. Hierzu müssen beschränkte Soll- und Störgrößen vorausgesetzt werden. Dies führt zur

**Annahme 4.2** (Beschränkte Solltrajektorien und Störungen). Für jeden Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  des Exosystems entfällt der Realteil, d. h.  $\Re\{\bar{\lambda}\} = 0$ , und die algebraische Vielfachheit ist identisch zur geometrischen.

Aus dem Gegenbeispiel 3.1 in Abschnitt 3.4.6 ist bekannt, dass es ohne diese Annahme im Allgemeinen kein optimales stationäres Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zu quadratischen Gütefunktionalen wie (3.3) gibt. Selbst wenn hier das allgemeinere Optimalitätskriterium eines optimalen stationären Verhaltens herangezogen würde, müsste dennoch die Annahme 4.2 getroffen werden. In diesem Sinne ist diese Annahme hier nicht als Einschränkung zu verstehen. Dies wird im Rahmen von Abschnitt 4.5 diskutiert.

## 4.2 Beiträge und Aufbau dieses Kapitels

Angenommen, dass die zulässigen Lösungen wie in Definition 4.1 eingeschränkt werden und man statt der überholenden Optimalität in Kapitel 3 die Minimierung des quadratischen Mittelwertes als Optimalitätskriterium verwendet, dann sind beide optimalen Output Regulation Probleme OORP 4.1 und 4.2 spezielle Fälle des optimalen Folgeregelungsproblems 2.1, S. 12, über einen unendlichen Horizont.

Das Problem OORP 4.1 weist noch eine zusätzliche Zustandsgrößenbeschränkung, gegeben durch (4.13), auf. Solche optimalen Folgeregelungsprobleme mit Beschränkungen, die allein von der Zustandsgröße und nicht von der Stellgröße abhängen, sind schwierig zu handhaben, wie in [39, Kap. 3.4] und [74, Abschn. 3.6.2] zu sehen ist. Dies gilt insbesondere für unendliche Horizonte, wie aus [147, Kap. 6.5] hervorgeht.

Bei der Betrachtung des Kostenfunktionals (4.15) fällt auf, dass dieses unabhängig von der Regelung  $\mathbf{u}_s(\cdot)$  ist. Bei dem Problem OORP 4.2

handelt sich daher um ein sogenanntes singuläres optimales Folgeregelungsproblem. Dieser Typ wurde bisher durch die Anforderung an die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  in den Problemen  $\text{OFP}_\infty 2.1$  und  $\text{OFP}_\infty 3.1$  ausgeschlossen. Die Bestimmung einer Lösung eines singulären optimalen Regelungsproblems ist generell komplex. Die betrachteten Probleme sind auch meist keine optimalen Folgeregelungsprobleme, wie z. B. in [6, Kap. 6.2], [39, Kap. 8], [74, Kap. 3.5]. Außerdem wird in der Regel vorausgesetzt, dass das Gesamtsystem, welches sich hier aus (4.1) und (4.2) zusammensetzen würde, stabilisierbar ist, siehe z. B. [64, 113, 133, 139, 166]. Diese Voraussetzung wäre eine starke Einschränkung.

Als zentraler Beitrag dieses Kapitels wird bewiesen, dass die optimalen Lösungen beider Probleme OORP 4.1 und 4.2 unter schwachen Annahmen und genauso einfach wie die Lösung des Problems ORP 4.1 bestimmt werden können. Damit wird die Output Regulation Theorie insbesondere für über- und unteraktuierte Systeme erweitert.

Die einzelnen **Beiträge** für jedes der beiden Probleme OORP 4.1 und 4.2 werden nun im Detail aufgelistet. Diese wurden im Wesentlichen in [29] veröffentlicht. Die Ideen hierzu wurden in [27] zum ersten Mal vorgestellt und auch im Rahmen von [23] präsentiert.

- B1) **Neue Regulatorgleichungen.** Auf Grundlage der notwendigen Optimalitätsbedingungen aus Abschnitt 2.5.1 und deren Ergänzung werden einfache neue Entwurfsgleichungen zur Bestimmung von Kandidaten der optimalen Lösungen hergeleitet. Die Entwurfsgleichungen weisen die gleiche Struktur wie die klassischen Regulatorgleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) auf.
- B2) **Analyse der Lösbarkeit.** Es werden notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der neuen Regulatorgleichungen angegeben. Hierzu gehören die Lösbarkeit der klassischen Gleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) sowie sogenannte Nicht-Resonanz-Bedingungen, die auch in der klassischen Output Regulation Anwendung finden.
- B3) **Beweis der Optimalität und Eindeutigkeit.** Mithilfe der Variationsrechnung wird die Optimalität jedes stationären Verhaltens, das mittels der neuen Regulatorgleichungen bestimmt wird, bewiesen. Außerdem werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit der optimalen Lösung hergeleitet.
- B4) **Grenzwert des optimalen stationären Verhaltens eines Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$ .** Unter der Annahme 3.2 zur Entdeckbarkeit wird

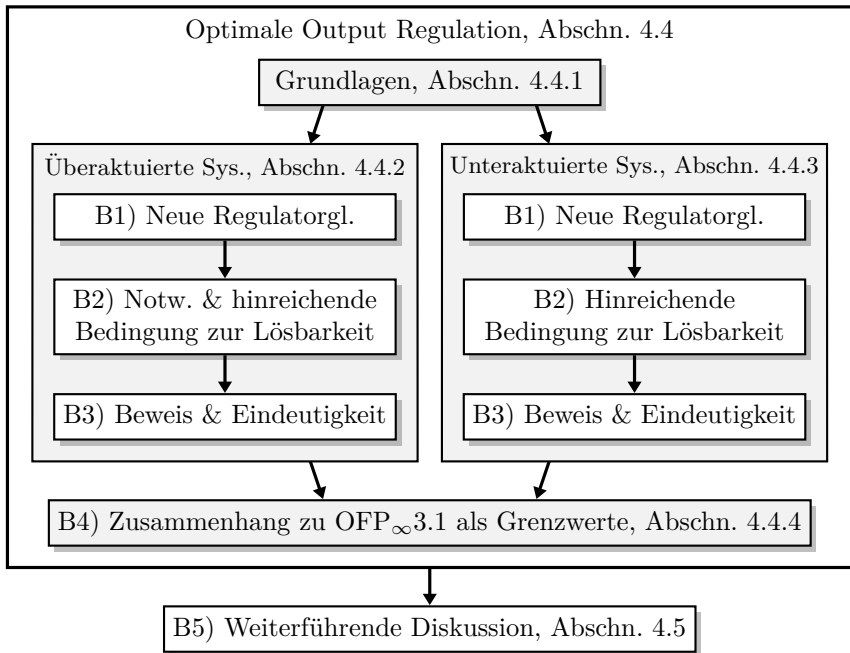
das optimale stationäre Verhalten eines Problems  $\text{OFP}_{\infty}3.1$  mit den Gewichtungen  $\rho \mathbf{Q}$  und  $\mu \mathbf{R}$  für  $\rho, \mu > 0$  wie in Abschnitt 3.4 bestimmt. Es wird bewiesen, dass die optimalen Lösungen der Probleme OORP 4.1 und 4.2 Grenzwerte dieses optimalen stationären Verhaltens sind, falls  $\rho \rightarrow \infty$  bzw.  $\mu \rightarrow 0$ .

- B5) **Weiterführende Diskussion.** Die Lösung des klassischen Problems ORP 4.1 für quadratische Systeme wird ebenfalls als Grenzwert eines optimalen stationären Verhaltens eines Problems  $\text{OFP}_{\infty}3.1$  identifiziert. Die neuen Regulatorgleichungen werden für einen Durchgriff der Stellgröße auf den Ausgang und eine zusätzliche Gewichtung der Zustände im Kostenfunktional (4.12) erweitert. Unter der Berücksichtigung allgemeinerer, zulässiger Lösungen nach Definition 2.2, S.15, wird erörtert, unter welchen zusätzlichen Bedingungen das im Beitrag B1) ermittelte stationäre Verhalten auch ein optimales stationäres Verhalten des Kostenfunktionals (4.12) bzw. (4.15) ist. Das Entfallen der Annahme 4.2 und die Frage, ob in diesem Fall Rückschlüsse aus dem Konzept eines Agreeable Plan wie in Abschnitt 3.5.3 gezogen werden können, werden ebenfalls diskutiert. Abschließend wird auf Basis der Ergebnisse dieses Kapitels gezeigt, dass die optimale Lösung des Problems OORP 4.1 auch durch die Lösung eines statischen Optimierungsproblems aus [108] bestimmt werden kann. Dies wurde bisher nicht nachgewiesen.

Die Abbildung 4.1 illustriert, wie die Beiträge aufeinander aufbauen und wie das Kapitel im Anschluss an den Stand der Technik in Abschnitt 4.3 organisiert wird. Abschließend werden die Ergebnisse an Simulationsbeispielen zu einem über- und einem unteraktuierten System in Abschnitt 4.6 veranschaulicht sowie ein Fazit in Abschnitt 4.7 gezogen.

### 4.3 Stand der Technik

In der Literatur werden über- und unteraktuierte Systeme und damit Probleme wie OORP 4.1 und OORP 4.2 getrennt voneinander betrachtet, wie es die folgende Analyse belegt. Dass diese tatsächlich über ein optimales Folgeregelungsproblem miteinander verknüpft sind, ist eine im Weiteren dargestellte Erkenntnis dieses Kapitels.



**Abbildung 4.1:** Aufbau der Beiträge und Struktur des Kapitels.

### 4.3.1 Überaktuierte Systeme

In Hinblick auf die Frage F1) werden in der Literatur sehr ähnliche Probleme wie OORP 4.1 behandelt, wenn das System (4.1) überaktuiert ist.

In [108] wird behauptet, dass zur Lösung des Problems OORP 4.1 ein Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  gewählt werden sollte, dass ein dort gestelltes statisches Optimierungsproblem mit den klassischen Regulatorgleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) als Nebenbedingungen löst. *Ohne* die Nebenbedingung (4.5b) entspricht dieses dem statischen Optimierungsproblem 3.1 in Abschnitt 3.6. Hierfür wurde in Satz 3.8 nachgewiesen, dass mithilfe von dessen Lösung das optimale stationäre Verhalten des Problems  $\text{OFP}_{\infty}3.1$  bestimmt werden kann. Wird jedoch die Nebenbedingung (4.5b) berücksichtigt, so wurde bisher nicht bewiesen, ob ein optimales stationäres Verhalten erreicht wird, insbesondere nicht für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Nichtsdestotrotz wird dieses

Optimierungsproblem wiederholt in aktuellen Ansätzen angewendet, siehe hierzu z. B. [69, 70] oder [148, Abschn. V-A].

Ein weiteres statisches Optimierungsproblem wird im Rahmen des Entwurfs eines optimalen Servokompensators<sup>6)</sup> für überaktuierte Systeme in [126] vorgestellt. Auch [126] verfolgt das Ziel, eine Lösung des Problems OORP 4.1 zu finden. Die Lösung des vorgeschlagenen Optimierungsproblems resultiert in einem stationären Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , das den quadratischen Mittelwert des Erwartungswertes der Kosten (4.12) über eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung des Anfangswertes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  minimiert. Dies impliziert jedoch keinesfalls, dass auch der quadratische Mittelwert (4.11) mit der Stellenergie (4.12) für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  minimiert wird. Außerdem ist es sehr aufwendig, den Ansatz in [126] durchzuführen, wie es [126, Abschn. 4.1] zeigt. Wie die Ergebnisse dieses Kapitels belegen, ist es tatsächlich möglich, ein stationäres Verhalten explizit auf einfachem Wege zu berechnen, das das Problem OORP 4.1 für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  löst.

Ohne eine Beweisführung, die sich nicht in [108] und [126] findet, kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Ansätze basierend auf statischen Optimierungsproblemen aus [108] und [126] für eine Lösung des Problems OORP 4.1 geeignet sind.

Ein anderer gängiger Ansatz aus der Literatur hat zum Ziel, explizite Freiheitsgrade zugänglich zu machen, die eine gezielte Beeinflussung des Zustandes  $\mathbf{x}$  und der Stellgröße  $\mathbf{u}$  erlauben, ohne dabei den Ausgangsverlauf  $\mathbf{y}(t)$  zu verändern. Die Idee ähnelt der *Control Allocation* aus z. B. [80, 99]. Hierzu wird zuerst ein Basisregler zur Trajektorienfolgeregelung entworfen, der das asymptotische Abklingen (4.4) des Folgefehlers garantiert. Während der Implementierung können dann die Freiheitsgrade zu einer Online-Optimierung eingesetzt werden, ohne die Konvergenz (4.4) des Folgefehlers zu beeinflussen. Diese Idee geht auf [170] zurück und wurde in [51] verallgemeinert. Mit Bezug zur Output Regulation werden spezielle Ansätze in [67, 68, 148] präsentiert.

Sind diese Freiheitsgrade verfügbar, so stellt sich die Frage, wie sie gewinnbringend genutzt werden können. Falls man dabei sinnvollerweise die Stellenergie und damit ein Kostenfunktional wie (4.12) berücksichtigen möchte, ist man immer noch mit der Aufgabe konfrontiert, ein optimales Folgeregelungsproblems zu lösen. In [51, 66] wird vorgeschlagen, dieses Ziel online durch einen vorgestellten dynamischen Gradientenabstieg zu erreichen, was zu einer dynamischen Regelstrategie führt. Für quadratische Kosten, wie in [51, Abschn. VI] und [66, Abschn. V], könnten stattdessen

<sup>6)</sup>Zu Aufbau und Funktionsweise eines Servokompensators siehe [123, Abschn. 4.4.5].

die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse verwendet werden. Hierdurch könnte sowohl die Reglerdynamik als auch die Komplexität der Reglerstruktur, die notwendig ist, um die Freiheitsgrade explizit verfügbar zu machen, vermieden werden.

In der im Fazit von Kapitel 3 aufgegriffenen Veröffentlichung [25] werden ähnlich wie in [163] explizite Freiheitsgrade in einem Entkopplungsreglerentwurf nach [58], der auch eine Folgeregung ermöglicht, hergeleitet. Im Gegensatz zu [163] werden die Freiheitsgrade genutzt, um mit den Methoden aus Kapitel 3 explizit ein optimales Folgeregungsproblem mit dem Kostenfunktional (4.12) zu lösen. Wird jedoch keine Entkopplung der Dynamik der  $p$  Ausgänge  $\mathbf{y}$  benötigt, dann verursacht dieser Ansatz unnötige Anforderungen an die Reglerstruktur sowie einen unnötigen Mehraufwand beim Reglerentwurf. Außerdem ist die Anwendung dieses Ansatzes für nichtminimalphasige Systeme problematisch. Dahingegen ist der in diesem Kapitel hergeleitete Ansatz für solche Systeme im Allgemeinen ohne Einschränkungen anwendbar.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass in der Literatur für überaktuierte Systeme bisher kein einfaches und umfassendes Verfahren, wie das hier im Weiteren eingeführte, existiert, von dem bekannt ist, dass es ein Problem wie OORP 4.1 löst.

### 4.3.2 Unteraktuierte Systeme

In der Literatur ist die Frage F2) im Kontext des Entwurfs einer Folgeregung für unteraktuierte Systeme (4.1) relevant.

Viele Beiträge, wie z. B. [14, 15, 45, 72, 73, 79, 91, 159, 168, 169], berechnen eine optimale quadratische Güte wie (4.15) für  $T \rightarrow \infty$  unter der Voraussetzung, dass diese Güte auch endlich ist, und geben in einigen Fällen auch den zugehörigen, meist dynamischen Regler an. Die Anwendbarkeit all dieser Verfahren ist jedoch auf *konstante* Sollwerte limitiert, d. h.  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ , und die meisten, nämlich [14, 15, 45, 79, 159, 168, 169], können auch nur für eine skalare Stellgröße  $u$  angewendet werden. Einige dieser Ansätze, wie [14, 15, 45, 79, 168, 169], beschränken sich außerdem auf konstante Sollwerte  $\bar{\mathbf{y}}$ , denen exakt gefolgt werden kann und für die somit die Konvergenz (4.4) des Folgefehlers erreicht wird. Andere, wie [73, 91, 159], modifizieren hingegen die Gütefunktion, indem nicht der Folgefehler quadratisch gewichtet wird, sondern die Abweichungen zu einem realisierbaren konstanten Ausgang  $\mathbf{y}_s$ . Dieser wird zuvor bestimmt, sodass die Norm des konstanten Fehlers  $\|\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}\|_2$  minimal ist.

Diese Minimierung der Norm des Fehlers  $\|\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}\|_2$  führt für konstante Sollwerte zu einer Lösung des Problems OORP 4.2. Dieser Ansatz wurde in [49, 52] umgesetzt. Das statische Optimierungsproblem in [167] zeigt, dass dieser Ansatz in direkter Verbindung zur Lösung optimaler Folgeregelungsprobleme für konstante Sollwerte steht.

Für zeitabhängige, beschränkte Solltrajektorien und Störungen sind jedoch zur Lösung des Problems OORP 4.2 nur wenige Ansätze, wie [48, 50] und [140, Kap. 17], bekannt. Dabei setzten [48, 50] ebenfalls eine skalare Stellgröße  $u$  und damit ein SIMO-System voraus. Außerdem ist die Berechnung des Reglers aufwendig und die Erweiterung auf unteraktuierte MIMO-Systeme erscheint nicht ohne Weiteres möglich. Die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse vermeiden diese Unzulänglichkeiten und implizieren gleichzeitig die Resultate von [48, 50] für SIMO-Systeme. In [140, Kap. 17] wird unter der Annahme 4.2 bewiesen, dass eine Lösung des Problems OORP 4.2 existiert. Dies ist kein triviales Ergebnis, da im Problem OORP 4.2 genau ein Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  gesucht wird, das einen minimalen quadratischen Mittelwert für beliebige Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}_0$  garantiert. Berücksichtigt man die Erkenntnis aus Satz 3.2 in Kapitel 3, nämlich dass das optimale Regelgesetz zum Problem OFP<sub>∞</sub> 3.1 für beliebige  $\bar{\mathbf{x}}_0$  immer die gleichen Matrizen  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  aufweist, so ist die Existenz einer solchen Lösung für das Problem OORP 4.2 zu erwarten. Wie nun die Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^y, \mathbf{F}^y)$  des Problems OORP 4.2 zu bestimmen ist, bleibt in [140] leider unbeantwortet und ist keinesfalls offensichtlich. Ein essentieller Beitrag dieses Kapitels besteht darin, zu zeigen, wie diese Lösung mittels algebraischer Gleichungen berechnet werden kann.

Demnach ist eine Lösung des Problems OORP 4.2, die unter den hier getroffenen, allgemeinen Annahmen gültig ist und genauso leicht zu berechnen ist, wie eine eindeutige Lösung des Problems ORP 4.1, bisher nicht bekannt.

## 4.4 Optimale Output Regulation

In diesem Abschnitt werden die Hauptresultate dieses Kapitels präsentiert. Hierzu zählen die Lösungen der beiden Probleme OORP 4.1 und 4.2 mit den Beiträgen B1) bis B3) sowie deren Zusammenhang zu einem optimalen Folgeregelungsproblem im Beitrag B4), S. 151. Der nächste Abschnitt legt die Grundlage für die Herleitungen und Beweisführungen.

### 4.4.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt wird ein linear-quadratisches optimales Folgeregelungsproblem eingeführt, das die beiden Probleme OORP 4.1 und 4.2 als Spezialfälle beinhaltet, wie in Abschnitt 4.4.4 gezeigt wird. Für dieses optimale Folgeregelungsproblem wird die Variationsrechnung aus Abschnitt 2.3.2 angepasst, wobei die Einschränkung auf die zulässigen Lösungen  $(\Pi_x \bar{x}(\cdot), F\bar{x}(\cdot))$  nach Definition 4.1 berücksichtigt wird. Dies führt auf die Entwurfsgleichungen zur Bestimmung eines Kandidaten.

#### Linear-quadratisches optimales Folgeregelungsproblem

Es wird das folgende Problem betrachtet:

**Optimales Folgeregelungsproblem: OFP<sub>∞</sub>4.1.** Für ein gegebenes  $\bar{x}_0$  finde eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$ , die den quadratischen Mittelwert  $QMW(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_T(\cdot)$  mit dem Kostenfunktional

$$J_T(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}})^\top \rho \mathbf{Q} (\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}_s^\top \mu \mathbf{R} \mathbf{u}_s) dt \quad (4.17)$$

minimiert, wobei  $\rho > 0$  und  $\mu > 0$  sowie  $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  erfüllt seien.

Das optimale Folgeregelungsproblem OFP<sub>∞</sub>4.1 wurde hier in Analogie zu den Problemen OORP 4.1 und 4.2 formuliert. Unter den Voraussetzungen  $\rho > 0$  und  $\mu > 0$  ist es eine Abwandlung des Problems OFP<sub>∞</sub>3.1 aus Kapitel 3. Werden die Annahme 3.1 und Annahme 3.2 aus Abschnitt 3.1 zusätzlich erfüllt, dann ist der Kandidat

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), F^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.18)$$

aus Satz 3.1, S. 71, eine optimale Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub>4.1. Dies folgt aus dem Korollar 3.1, S. 82, das ein optimales stationäres Verhalten nach der Definition 2.4, S. 20, nachweist, und der Definition 2.5 der QMW-Optimalität in Abschnitt 2.2.1. Offensichtlich hängt diese Lösung von den eingeführten Parametern  $\rho$  und  $\mu$  ab. In Abschnitt 4.4.4 wird durch den Übergang  $\rho \rightarrow \infty$  bzw.  $\mu \rightarrow 0$  nachgewiesen, dass die Probleme OORP 4.1 und 4.2 Spezialfälle des Problems OFP<sub>∞</sub>4.1 sind.



### Variationsrechnung

Die Variationsrechnung aus Abschnitt 2.3 wird nun für das Problem  $\text{OFP}_{\infty 4.1}$  angepasst. Zu jeder zulässigen Lösung

$$(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = (\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.19)$$

und jedem  $\mathbb{R} \ni \epsilon \neq 0$  existiert eine *stationäre Variation*  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot))$ , sodass

$$\mathbf{x}_s(t) \equiv \mathbf{x}_s^*(t) + \epsilon \delta \mathbf{x}_s(t) \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{u}_s(t) \equiv \mathbf{u}_s^*(t) + \epsilon \delta \mathbf{u}_s(t) \quad (4.20b)$$

gilt. Die stationäre Variation wird durch die Differenz der Lösungen (4.19) und (4.18) festgelegt, woraus folgt, dass diese in der Form

$$(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) := (\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.21)$$

vorliegt. Beide Paare  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  und  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  erfüllen wegen der Definition 4.1 die Sylvestergleichung (4.5a). Setzt man daher

$$\mathbf{\Pi}_x = \mathbf{\Pi}_x^* + \epsilon \delta \mathbf{\Pi}_x \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \epsilon \delta \mathbf{F} \quad (4.22b)$$

in (4.5a) ein, so folgt daraus, dass  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$  die Sylvestergleichung

$$\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{B} \delta \mathbf{F} \quad (4.23)$$

löst. Hieraus resultiert, dass eine frei gewählte Variation (4.21) nur dann zulässig ist, wenn  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$  die Bedingung (4.23) erfüllt.

Auf Basis dieser Definitionen, kann die Variationsrechnung völlig analog zu Abschnitt 2.3 durchgeführt werden. Das Ziel ist es, die Kostendifferenz

$$\Delta J_T(\cdot) := J_T(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) - J_T(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) \quad (4.24)$$

zu berechnen. Hierzu wird  $\Delta J_T(\cdot)$  wie in Abschnitt 2.3.1 als Funktion von  $\epsilon$  in einer Taylorreihe im Punkt  $\epsilon = 0$  entwickelt. Analog zum Ergebnis (2.71) in Abschnitt 2.3.2 erhält man

$$\Delta J_T(\delta \mathbf{x}_s, \delta \mathbf{u}_s, \mathbf{x}_s^*, \mathbf{u}_s^*) = \delta^1 J_T(\cdot) + \frac{1}{2} \delta^2 J_T(\cdot) \quad (4.25)$$

mit der ersten Variation der Kosten  $\delta^1 J_T(\cdot)$  und der zweiten Variation  $\delta^2 J_T(\cdot)$ . Dabei wurde bereits ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\epsilon = 1$

eingesetzt, da der Parameter  $\epsilon$  im Weiteren nicht mehr benötigt wird.<sup>7)</sup> Unter der Berücksichtigung des Kostenfunktional (4.17) sei die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi, \bar{\mathbf{x}}) := \frac{1}{2} ((\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}})^\top \rho \mathbf{Q} (\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}_s^\top \mu \mathbf{R} \mathbf{u}_s) + \phi_s^\top (\mathbf{A} \mathbf{x}_s + \mathbf{B} \mathbf{u}_s + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}) \quad (4.26)$$

analog zu Abschnitt 2.3.2 definiert. Hierin ist  $\phi_s(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Kozustand. Analog zu Abschnitt 2.3.1 wird gefordert, dass der Kandidat  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  und der Kozustand  $\phi_s(\cdot)$  die beiden Bedingungen

$$0 = \left( \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi_s, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_s} \right) \Big|_* + \dot{\phi}^\top \delta \mathbf{x}_s, \quad (4.27a)$$

$$0 = \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi_s, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{u}_s} \Big|_*^\top \delta \mathbf{u}_s \quad (4.27b)$$

für jede nicht triviale, stationäre Variation  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  und einen beliebigen Anfangswert  $\phi_s(0) \in \mathbb{R}^n$  einhalten.<sup>8)</sup> Dann ist die erste Variation gemäß (2.48) durch

$$\delta^1 J_T(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) = \phi_s(0)^\top \delta \mathbf{x}_s(0) - \phi_s(T)^\top \delta \mathbf{x}_s(T) \quad (4.28)$$

gegeben. Im Gegensatz zu den Abschnitten 2.3 und 3.4.1 ist hier zu beachten, dass die Variation des Anfangswertes  $\delta \mathbf{x}_s(0) = (\mathbf{\Pi}_x - \mathbf{\Pi}_x^*) \bar{\mathbf{x}}_0$  im Allgemeinen nicht entfällt und daher  $\delta \mathbf{x}_s(0) \neq \mathbf{0}$  gilt.

Aus (2.73) folgt für die zweite Variation sofort

$$\delta^2 J_T(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) = \int_0^T (\delta \mathbf{x}_s^\top \mathbf{C}^\top \rho \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_s + \delta \mathbf{u}_s^\top \mu \mathbf{R} \delta \mathbf{u}_s) dt. \quad (4.29)$$

Damit die beiden Bedingungen in (4.27) erfüllt werden, war es bisher wegen der notwendigen Optimalitätsbedingungen aus Satz 2.3, S. 48, und

<sup>7)</sup> Analog zum Abschnitt 2.3.2, S. 38, darf  $\epsilon \neq 0$  frei gewählt werden. Dies ist möglich, da für ein gegebenes Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{F}^*)$  und für jedes zulässige Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  eine Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$  zu jedem beliebigen  $\epsilon \neq 0$  existiert, die die Bedingungen (4.22) und (4.23) erfüllt. Der Grund hierfür ist, dass die Sylvestergleichung (4.23) linear von  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$  abhängt.

<sup>8)</sup> Hierbei wird die Notation  $f(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \cdot)|_* := f(\mathbf{x}_s^*, \mathbf{u}_s^*, \cdot)$  verwendet.

daher auch im Abschnitt 3.4.1 erforderlich, dass die Koeffizienten von  $\delta \mathbf{x}_s$  bzw.  $\delta \mathbf{u}_s$  in (4.27) identisch zum Nullvektor sind:

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi_s, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_s} \right|_* + \dot{\phi}_s, \quad (4.30a)$$

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi_s, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{u}_s} \right|_*. \quad (4.30b)$$

Im Gegensatz zu den Abschnitten 2.5.1 und Abschnitt 3.4.1 sind die Variationen (4.21) hier allerdings durch die Definition 4.1 stark eingeschränkt. So lässt sich z. B. nicht mehr das fundamentale Lemma A.1 der Variationsrechnung anwenden. Die Optimalitätsbedingungen (4.30) gemäß Satz 2.3 bzw. aus [76] sind daher aufgrund der Definition 4.1 im Allgemeinen hier nicht mehr notwendig.

## Entwurfsgleichungen

Trotz der vorangegangenen Diskussion wird sich herausstellen, dass es zielführend ist, eine zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zu bestimmen, die die Bedingungen (4.30) einhält. Dies führt nämlich auf einen vielversprechenden Kandidaten zur Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub>4.1.

Berücksichtigt man die Hamilton-Funktion (4.26), dann sind die Bedingungen (4.30) äquivalent zu

$$\dot{\phi}_s = -\mathbf{A}^\top \phi_s - \mathbf{C}^\top \rho \mathbf{Q}(\mathbf{C} \mathbf{x}_s^* + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}), \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{0} = \mu \mathbf{R} \mathbf{u}_s^* + \mathbf{B}^\top \phi_s. \quad (4.31b)$$

Da nur das stationäre Verhalten relevant ist, wählt man den Kozustand  $\phi_s(t) = \mathbf{\Pi}_\phi \bar{\mathbf{x}}(t)$  mit  $\mathbf{\Pi}_\phi \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  analog zu (3.11) im Abschnitt 3.4.1. Für beliebige Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}_0$  werden dann die beiden Gleichungen (4.31) von der zulässigen Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  erfüllt, falls das Tripel  $(\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi, \mathbf{F}^*)$  die Gleichungen

$$\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{B} \mathbf{F}^* + \mathbf{E}_d, \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{\Pi}_\phi \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \mathbf{\Pi}_\phi - \mathbf{C}^\top \rho \mathbf{Q}(\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}), \quad (4.32b)$$

$$\mathbf{0} = \mu \mathbf{R} \mathbf{F}^* + \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi. \quad (4.32c)$$

löst, wobei die Sylvestergleichung (4.5a) ergänzt wurde. Für  $\rho = 1$  und  $\mu = 1$  können diese in die Sylvestergleichung (3.13) aus Abschnitt 3.4.1 überführt werden. Anhand des folgenden Lemmas wird deutlich, dass so

ein vielversprechender Kandidat zur Lösung des Problems  $\text{OFP}_\infty 4.1$  gewonnen wurde:

**Lemma 4.1.** *Die Annahme 4.2 treffe zu und zu jedem gegebenen Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  seien die Bedingungen (4.30) durch die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  und den Kozustand  $\phi_s(t) = \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(t)$  erfüllt. Für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist dann die Differenz der quadratischen Mittelwerte*

$$\Delta QMW(\cdot) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( J_T(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) - J_T(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) \right) \quad (4.33)$$

zu jeder zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = (\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  durch

$$\Delta QMW(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (\delta \mathbf{x}_s^\top \mathbf{C}^\top \rho \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_s + \delta \mathbf{u}_s^\top \mu \mathbf{R} \delta \mathbf{u}_s) dt \quad (4.34)$$

gegeben, wobei  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) = (\delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  durch

$$(\delta \Pi_x, \delta \mathbf{F}) = (\Pi_x - \Pi_x^*, \mathbf{F} - \mathbf{F}^*) \quad (4.35)$$

bestimmt sei<sup>9)</sup> und das Paar  $(\delta \Pi_x, \delta \mathbf{F})$  die Sylvestergleichung (4.23) löst.

*Beweis.* Mit der Kostendifferenz  $\Delta J_T(\cdot)$  aus (4.25) resultiert

$$\Delta QMW(\cdot) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (\delta^1 J_T(\cdot) + \frac{1}{2} \delta^2 J_T(\cdot)). \quad (4.36)$$

Da die Bedingungen (4.27a) und (4.27b) durch  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  erfüllt werden, ist  $\delta^1 J_T(\cdot)$  durch (4.28) gegeben. Infolge der Annahme 4.2 sind  $\|\phi_s(t)\|_2 = \|\Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2$ ,  $\|\delta \mathbf{x}_s(t)\|_2 = \|\delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2$  und somit auch  $|\delta^1 J_T(\cdot)|$  beschränkte Funktionen auf dem Intervall  $[0, \infty)$  für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Dies impliziert  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\delta^1 J_T(\cdot)| = 0$  und das Ergebnis (4.34) folgt aus der Gleichung (4.29) für die zweite Variation  $\delta^2 J_T(\cdot)$ .  $\square$

Bei der Herleitung der Hauptresultate dieses Kapitels wird das Lemma 4.1 und die quadratische Gestalt (4.29) von  $\delta^2 J(\delta \mathbf{x}_s, \delta \mathbf{u}_s)$  in den Beweisführungen zur Optimalität genutzt. Um darüber hinaus noch Bedingungen für die Eindeutigkeit einer optimalen Lösung zu gewinnen, wird ein weiteres wichtiges Lemma F.1 im Anhang F.1, S. 251, hergeleitet.

<sup>9)</sup> Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde  $\epsilon = 1$  gewählt, siehe Fußnote 7), S. 159.

### 4.4.2 Überaktuierte Systeme – Lösung von OORP 4.1

Ist das System (4.1) überaktuiert und ist daher die Rangbedingung  $\text{rang}(\mathbf{B}) > m$  in (4.9) erfüllt, dann haben die Regulatorgleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) in (4.5) im Allgemeinen unendlich viele Lösungen  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$ . Es stellt sich somit die Frage F1), S. 147, d. h., es wird eine Lösung

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.37)$$

des Problems OORP 4.1, S. 148, gesucht.

Dieser Abschnitt zeigt, wie eine optimale Lösung bestimmt werden kann, die unter schwachen Annahmen fast immer für beliebige Exosysteme existiert und eindeutig ist. Es sei betont, dass dabei die Rangbedingung (4.9) *nicht vorausgesetzt* wird. Alle Ergebnisse können daher auch auf Systeme ohne Überaktuierung angewendet werden, wenn für diese die Frage F1) und das Problem OORP 4.1 relevant sind.

#### Zulässige stationäre Variationen

Zuerst wird die Analyse aus Abschnitt 4.4.1 auf das Problem OORP 4.1 übertragen. Hierzu werden zunächst die stationären Variationen (4.21) ermittelt, die für das Problem OORP 4.1 zulässig sind. Wegen der Nebenbedingung (4.13)

$$\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_s(t) + (\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{C}\mathbf{\Pi}_x + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0} \quad (4.38)$$

muss jede zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}})$  zum Problem OORP 4.1 auch zu einer Lösung des herkömmlichen Problems ORP 4.1 führen. Ein stationäres Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}})$  ist somit nur dann zulässig, wenn das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  die Regulatorgleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) löst.<sup>10)</sup> Jede stationäre Variation  $(\delta \mathbf{x}_s, \delta \mathbf{u}_s) = (\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}})$ , die durch die Differenzen

$$\delta \mathbf{\Pi}_x = \mathbf{\Pi}_x - \mathbf{\Pi}_x^u \quad (4.39a)$$

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^u \quad (4.39b)$$

definiert ist,<sup>11)</sup> muss demnach die Bedingung

$$\mathbf{C}\delta \mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0} \quad (4.40)$$

<sup>10)</sup>Wie in Abschnitt 4.1 diskutiert, ist die Erfüllung der Regulatorgleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) unter den getroffenen Annahmen notwendig zur Lösung des Problems ORP 4.1.

<sup>11)</sup>Da der Parameter  $\epsilon$  nicht weiter von Nutzen ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\epsilon = 1$  in (4.20) gewählt. Siehe hierzu Fußnote 7), S. 159.

für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  erfüllen. Unter Einbezug der Sylvestergleichung (4.23) ist eine stationäre Variation zum Problem OORP 4.1 folglich nur dann zulässig, falls das Paar  $(\delta\mathbf{\Pi}_x, \delta\mathbf{F})$  die Regulatorgleichungen

$$\delta\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \delta\mathbf{\Pi}_x + \mathbf{B} \delta\mathbf{F}, \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{C} \delta\mathbf{\Pi}_x \quad (4.41b)$$

löst. Es sei angemerkt, dass genau dann nicht triviale Lösungen  $(\delta\mathbf{\Pi}_x, \delta\mathbf{F}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  von (4.41) existieren, falls die Lösung der Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  nicht eindeutig ist.

### Entwurfsgleichungen

Nun wird ein Kandidat  $(\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}})$  so bestimmt, damit das Lemma 4.1 angewendet werden kann. Dazu ist festzustellen, dass unter den Vorgaben der Zustandsbeschränkung (4.13), die  $\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t) \equiv \mathbf{0}$  sicherstellt, und des Parameters  $\mu = 1$  das Problem OORP 4.1 äquivalent zum Problem OFP<sub>∞</sub> 4.1 ist. Um die Zustandsbeschränkung zu berücksichtigen, ist, wie zuvor diskutiert, lediglich die zusätzliche Forderung (4.40) an die stationäre Variation zu beachten. Unter Beachtung dessen ist es möglich, die Variationsrechnung genauso wie in Abschnitt 4.4.1 durchzuführen.

Daraus schließt man, dass das Lemma 4.1 anwendbar ist, falls der Kandidat  $(\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}})$  ebenfalls die Bedingungen (4.27) für alle Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und jede zulässige Variation  $(\delta\mathbf{x}_s(\cdot), \delta\mathbf{u}_s(\cdot))$  erfüllt. Berücksichtigt man jedoch die Einschränkung (4.40) so ist es anders als in (4.30a) nicht nötig, den Koeffizienten von  $\delta\mathbf{x}_s$  in (4.27a) gleich dem Nullvektor zu wählen. Stattdessen genügt es, die Gleichung

$$\left. \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_s} \right|_* + \dot{\phi} = \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_\phi \quad (4.42)$$

für einen beliebigen Eingang  $\mathbf{u}_\phi(t) \in \mathbb{R}^p$  zu erfüllen. Dann gilt wegen (4.40) nämlich für die Bedingung (4.27a):

$$\left( \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi_s, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_s} \right|_* + \dot{\phi} \right)^\top \delta\mathbf{x}_s = \mathbf{u}_\phi(t)^\top \mathbf{C} \delta\mathbf{x}_s(t) \equiv \mathbf{0}. \quad (4.43)$$

Die Variation  $\delta\mathbf{u}_s = \delta\mathbf{F}\bar{\mathbf{x}}$  ist ebenfalls durch (4.41) eingeschränkt. Nichtsdestotrotz wird sich herausstellen, dass es auch hier zielführend ist, den Koeffizient von  $\delta\mathbf{u}_s$  in (4.27b) wie in (4.30b) gleich dem Nullvektor zu wählen.

Um nun aus der neuen Bedingung (4.42) und der bereits eingeführten Bedingung (4.30b) algebraische Entwurfsgleichungen herzuleiten, wird die Hamilton-Funktion (4.26) für  $\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t) \equiv \mathbf{0}$  und  $\mu = 1$  angesetzt:

$$H(\cdot) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_s^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_s + \phi_s^\top (\mathbf{A} \mathbf{x}_s + \mathbf{B} \mathbf{u}_s + \mathbf{E}_d). \quad (4.44)$$

Die Bedingung (4.42) lautet daher

$$\dot{\phi}_s = -\mathbf{A}^\top \phi_s + \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_\phi. \quad (4.45)$$

Sie wird für den Ansatz  $\phi = \Pi_\phi^u \bar{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{u}_\phi = \mathbf{F}_\phi \bar{\mathbf{x}}$  mittels der Sylvester-Gleichung

$$\Pi_\phi^u \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \Pi_\phi^u + \mathbf{C}^\top \mathbf{F}_\phi^u \quad (4.46)$$

erfüllt. Durch die Wahl  $\mathbf{F}^u = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u$  ist die Bedingung (4.27b) immer erfüllt.

Wird noch die Sylvestergleichung (4.32a) miteinbezogen, so führt dies auf die *neuen Regulatorgleichungen* ( $\mathcal{RG}^u$ ):

$$(\mathcal{RG}^u) \begin{cases} \Pi_\phi^u \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \Pi_\phi^u + \mathbf{C}^\top \mathbf{F}_\phi^u, & (4.47a) \\ \Pi_x^u \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x^u - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u + \mathbf{E}_d, & (4.47b) \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \Pi_x^u + \mathbf{D}_d. & (4.47c) \end{cases}$$

Jede Lösung  $(\Pi_x^u, \Pi_\phi^u, \mathbf{F}_\phi^u)$  der neuen Gleichungen ( $\mathcal{RG}^u$ ) liefert einen Kandidaten  $(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zur Lösung des Problems OORP 4.1, für den, wie gewünscht, das Lemma 4.1 angewendet werden kann.

### Notwendigkeit der Existenz, Optimalität und Eindeutigkeit

Den hergeleiteten Entwurfsgleichungen ( $\mathcal{RG}^u$ ) liegen die Bedingungen (4.27) zugrunde. Wie im Anschluss an (4.30) in Abschnitt 4.4.1 angesprochen, müssen diese Bedingungen nicht zwingend von einer optimalen Lösung erfüllt werden. Es stellt sich daher die Frage, ob es möglich ist, dass die Gleichungen ( $\mathcal{RG}^u$ ) nicht gelöst werden können, obwohl eine Lösung des Problems OORP 4.1 existiert. Eine Lösung des Problems OORP 4.1 kann offensichtlich nur dann existieren, wenn auch eine Lösung des klassischen Problems ORP 4.1 existiert. Nach [63, 155] ist Letzteres genau dann der Fall, wenn die Gleichungen ( $\mathcal{RG}$ ) mindestens eine Lösung haben. Das folgende Lemma stellt fest, dass die Gleichungen ( $\mathcal{RG}^u$ ) *genau dann* auch gelöst werden können.

**Satz 4.1.** *Die Annahmen 4.1 und 4.2 seien erfüllt. Ein Tripel  $(\Pi_x^u, \Pi_\phi^u, \mathbf{F}_\phi^u)$ , das die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  in (4.47) löst, existiert genau dann, wenn mindestens ein Paar  $(\Pi_x, \mathbf{F})$  existiert, das die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  in (4.5) löst.*

*Beweis.* Der Beweis wird in Anhang F.2 präsentiert.  $\square$

Dieses Ergebnis ist von hohem Interesse. Hieraus folgt, dass die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  immer gelöst werden können, wenn eine Lösung des Output Regulation Problems ORP 4.1 existiert. Ihre Lösbarkeit ist somit nicht nur eine hinreichende, sondern sogar eine notwendige Bedingung zur Lösung des Problems ORP 4.1.

Das vierte Hauptresultat dieser Arbeit wird nun präsentiert. Es besagt im Wesentlichen, dass jeder mittels der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  gewonnene Kandidat eine optimale Lösung zum Problem OORP 4.1 ist und dass keine Lösung existiert, falls es keinen solchen Kandidaten gibt. In Verbindung mit Satz 4.1 schließt man daraus, dass die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  immer durch die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  ersetzt werden können, um sowohl eine Lösung des klassischen ORP 4.1 zu finden, als auch eine optimale Ausnutzung der vorhandenen Stellgrößen bezüglich des Mittelwertes der mit  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  gewichteten Stellenergie zu garantieren. Dabei ist das Resultat prinzipiell für jedes System (4.1) unter den gestellten Annahmen anwendbar, jedoch im Allgemeinen für überaktuierte Systeme von höchstem Interesse. Es wird auf Basis des Satzes 4.1 sowie der Lemmata 4.1, S. 161, und F.1<sup>12)</sup> nachgewiesen.

**Satz 4.2** (Lösung des Problems OORP 4.1). *Die Annahmen 4.1 und 4.2 aus Abschnitt 4.1 seien erfüllt. Es existiert eine Lösung des Problems OORP 4.1 dann und nur dann, wenn wenigstens ein Tripel  $(\Pi_x^u, \Pi_\phi^u, \mathbf{F}_\phi^u)$  existiert, das die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  in (4.47) löst. Für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist die zulässige Lösung*

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.48)$$

*mit der Vorfiltermatrix*

$$\mathbf{F}^u = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u \quad (4.49)$$

<sup>12)</sup>Das Lemma F.1 wird in Anhang F.1, S. 251, hergeleitet und dient dazu, eine im Weiteren aufgestellte Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung des Problems OORP 4.1 zu belegen.



eine optimale Lösung zum Problem OORP 4.1. D. h., ihr quadratischer Mittelwert

$$QMW^u(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}(t)^\top \mathbf{F}^{u\top} \mathbf{R} \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(t) dt \right) \quad (4.50)$$

ist ein Minimum von  $QMW^u(\cdot)$  in (4.11) und sie hält die Zustandsbeschränkung (4.13)

$$\mathbf{y}_s^*(t) = \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(t), \quad \forall t \in [0, \infty)$$

ein. Die optimale Lösung ist dann und nur dann eindeutig, wenn kein Eigenwert des Exosystems mit einem unbeobachtbaren Eigenwert des Systems (4.1) übereinstimmt:

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A}^\top & \mathbf{C}^\top \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}}). \quad (4.51)$$

*Beweis.* Wie bereits diskutiert wurde, impliziert die Existenz einer Lösung des Problems OORP 4.1, dass eine Lösung des herkömmlichen Problems ORP 4.1 existiert. Unter den getroffenen Annahmen existiert dann notwendigerweise eine Lösung der klassischen Regulatorgleichungen ( $\mathcal{RG}$ ), vergleiche hierzu [63, 155]. Aus dem Satz 4.1 folgt, dass die neuen Gleichungen ( $\mathcal{RG}^u$ ) eine Lösung besitzen, was das erste „nur dann“ beweist.

Dass „dann“ auch eine optimale Lösung durch den Kandidaten (4.48) gegeben ist, wird mithilfe von Lemma 4.1, S. 161, bewiesen. Die Herleitung der Entwurfsgleichungen ( $\mathcal{RG}^u$ ) zeigt, dass für den Kandidaten (4.48) und den Kozustand  $\phi = \mathbf{\Pi}_\phi^u \bar{\mathbf{x}}$  die Bedingungen (4.30) von Lemma 4.1 erfüllt sind. Für jede zulässige stationäre Variation  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot))$ , die mittels (4.41) bestimmt wurde, und damit auch für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , die die Zustandsbeschränkung (4.13) einhält, resultiert die Differenz des quadratischen Mittelwertes zu

$$\Delta QMW^u(\delta \mathbf{x}_s, \delta \mathbf{u}_s, \mathbf{x}_s^*, \mathbf{u}_s^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}(t)^\top \delta \mathbf{F}^\top \mathbf{R} \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t) dt, \quad (4.52)$$

wobei  $\mathbf{C} \delta \mathbf{x}_s(t) \equiv \mathbf{0}$  und  $\mu = 1$  in (4.34) verwendet wurde. Aufgrund von  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  folgt daraus

$$\Delta QMW^u(\cdot) = QMW^u(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) - QMW^u(\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \geq \mathbf{0} \quad (4.53)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  und jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$ . Daher minimiert  $(\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}})$  den quadratischen Mittelwert  $QMW^u(\cdot)$ .

Der zweite Teil dieses Beweises widmet sich der Aussage, dass die Bedingung (4.51) notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit der optimalen Lösung ist.

Es wird gezeigt, dass genau dann eine positive Kostendifferenz  $\Delta QMW^u(\cdot) > 0$  für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{0}$  und jede nichttriviale, zulässige stationäre Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  vorliegt, wenn die Bedingung (4.51) erfüllt wird, was die Eindeutigkeit der optimalen Lösung (4.48) impliziert. Hierzu wird die Kostendifferenz (4.52) mittels des Lemmas F.1, S. 251, in Abhängigkeit der Beobachtbarkeit des künstlichen Systems  $(\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{A}})$  mit dem reellen Ausgang  $\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}$ , wobei  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{1/2}^\top \mathbf{R}_{1/2}$  sei, untersucht. Dies erfolgt in einer vollständigen, dreiteiligen Fallstudie:

**Fall 1.** Als Konsequenz des Falls (F.2a) im Lemma F.1 aus Anhang F.1 trifft  $\Delta QMW^u(\cdot) > 0$  für jede nichttriviale Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zu, für die das System  $(\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{A}})$  vollständig beobachtbar ist.

**Fall 2.** Für die nichttriviale Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  sei angenommen, dass  $n_B$  Eigenwerte von  $\bar{\mathbf{A}}$  im künstlichen System  $(\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{A}})$  beobachtbar sind, wobei  $0 < n_B < \bar{n}$  sei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass das Exosystem (4.2a) mit dem reellen Ausgang  $\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}$  bereits in der Form der Zerlegung (F.1) vorliegt.<sup>13)</sup> Aus der Struktur von  $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{0}] = \mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F}$  für diese Zerlegung folgt

$$\delta \mathbf{F} = [\delta \mathbf{F}_1 \quad \mathbf{0}] \quad (4.54)$$

mit  $\delta \mathbf{F}_1 \in \mathbb{C}^{m \times n_B}$  aufgrund der Invertierbarkeit von  $\mathbf{R}_{1/2}$ . Es sei ebenfalls  $\mathbf{\Pi}_x = [\mathbf{\Pi}_{x,1} \quad \mathbf{\Pi}_{x,2}]$  entsprechend unterteilt. Weiterhin gilt für die Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}} = \text{diag}(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{22})$  und für den Zustandsvektor  $\bar{\mathbf{x}}^\top = [\bar{\mathbf{x}}_1^\top \quad \bar{\mathbf{x}}_2^\top]$ .

Da das Teilsystem  $(\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F}_1, \bar{\mathbf{A}}_{11})$  vollständig beobachtbar ist, resultiert  $\Delta QMW^u(\cdot) > 0$  für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_1(0) \neq \mathbf{0}$  völlig analog zum Fall 1.

Es sei nun  $\bar{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{0}$  und  $\bar{\mathbf{x}}_2(0) \neq \mathbf{0}$ . Die Variation ist dann durch  $(\delta \mathbf{\Pi}_{x,2} \bar{\mathbf{x}}_2(\cdot), \mathbf{0})$  gegeben. Das zugehörige Paar  $(\delta \mathbf{\Pi}_{x,2}, \mathbf{0})$  muss die Voraussetzung (4.41) und somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2} \bar{\mathbf{A}}_{22} &= \mathbf{A} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2}, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

<sup>13)</sup> Dies kann immer durch eine vorangegangene Zustandstransformation erreicht werden.

erfüllen. Da  $\overline{\mathbf{A}}_{22}$  gemäß Lemma F.1 eine Diagonalmatrix ist, ist (4.55) genau dann gewährleistet, wenn jede Spalte  $\delta\boldsymbol{\pi}_{x,2,i}$  von  $\delta\boldsymbol{\Pi}_{x,2}$  die Gleichung

$$\delta\boldsymbol{\pi}_{x,2,i}^\top [\bar{\lambda}_i \mathbf{I} - \mathbf{A}^\top \quad \mathbf{C}^\top] = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

löst, wobei  $\bar{\lambda}_i$  der  $i$ -te Eintrag auf der Diagonalen von  $\overline{\mathbf{A}}_{22}$  ist. Dies impliziert  $\bar{\lambda}_i \in \sigma(\overline{\mathbf{A}})$ . Aufgrund der Bedingung (4.51) hat die Matrix  $[\bar{\lambda}_i \mathbf{I} - \mathbf{A}^\top \quad \mathbf{C}^\top]$  jedoch vollen Zeilenrang. Wegen (4.56) müssen alle Spalten  $\delta\boldsymbol{\pi}_{x,2,i} = \mathbf{0}$  sein. Daraus resultiert  $\delta\boldsymbol{\Pi}_{x,2} = \mathbf{0}$  und es folgt, dass die Variation für  $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0}$  trivial ist und nicht berücksichtigt werden muss.

Zusammenfassend gilt: Für jede nichttriviale zulässige stationäre Variation  $(\delta\boldsymbol{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta\mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , für die einige aber nicht alle der  $\bar{n}$  Eigenwerte von  $\overline{\mathbf{A}}$  im künstlichen System  $(\mathbf{R}_{1/2} \delta\mathbf{F}, \overline{\mathbf{A}})$  beobachtbar sind, ist  $\Delta QMW^u(\cdot) > 0$  aus (4.52) infolge der Bedingung (4.51) erfüllt.

**Fall 3.** Zur Vervollständigung der Fallstudie wird eine beliebige Variation  $(\delta\boldsymbol{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta\mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  betrachtet, bei der kein Eigenwert von  $\overline{\mathbf{A}}$  im künstlichen System  $(\mathbf{R}_{1/2} \delta\mathbf{F}, \overline{\mathbf{A}})$  beobachtbar ist. Dies impliziert sofort  $\delta\mathbf{F} = \mathbf{0}$  wegen der Invertierbarkeit von  $\mathbf{R}_{1/2}$ . Das Paar  $(\delta\boldsymbol{\Pi}_x, \mathbf{0})$  muss die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\Pi}_x \overline{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \delta\boldsymbol{\Pi}_x, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{C} \delta\boldsymbol{\Pi}_x \end{aligned} \quad (4.57)$$

lösen, damit die Voraussetzung (4.41) erfüllt wird. Analog zu Fall 2 resultiert daher  $\delta\boldsymbol{\Pi}_x = \mathbf{0}$  aus der Bedingung (4.51). Demnach liegt eine triviale Variation  $(\delta\mathbf{x}_s(\cdot), \delta\mathbf{u}_s(\cdot)) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  vor, die offensichtlich bei der Prüfung auf Eindeutigkeit der optimalen Lösung nicht berücksichtigt werden muss.

Es verbleibt nur noch, die Notwendigkeit der Bedingung (4.51) für die Eindeutigkeit der optimalen Lösung (4.48) zu zeigen, was nun per Widerspruch erfolgt. Dazu sei angenommen, dass die optimale Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  eindeutig ist, obwohl die Bedingung (4.51) nicht für jeden Eigenwert  $\bar{\lambda}$  von  $\overline{\mathbf{A}}$  erfüllt wird. Demnach gibt es einen Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\overline{\mathbf{A}})$ , zu dem ein Vektor  $\mathbf{C}^n \ni \delta\boldsymbol{\pi}_x \neq \mathbf{0}$  existiert, sodass

$$\delta\boldsymbol{\pi}_x^\top [\bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A}^\top \quad \mathbf{C}^\top] = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

gilt. Aufgrund der Annahme 4.2 sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Systemmatrix  $\overline{\mathbf{A}}$  diagonal ist und der Eigenwert  $\bar{\lambda}$  das erste Element auf der Diagonalen ist. Dann ist  $\bar{\mathbf{x}}_1$  der zugehörige Zustand des Exosystems. Das Paar  $(\delta\boldsymbol{\pi}_x, \delta\mathbf{f})$  mit  $\delta\boldsymbol{\pi}_x \neq \mathbf{0}$  gemäß (4.58)

und  $\delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$  erfüllt dann die Voraussetzung (4.41) zum skalaren Teilsystem  $\dot{\bar{x}}_1 = \bar{\lambda} \bar{x}_1$  des Exosystems (4.2a). Es ist folglich möglich, für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  die zulässige stationäre Variation

$$(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \equiv (\delta \mathbf{\pi}_x \bar{x}_1, \mathbf{0}) \quad (4.59)$$

zu konstruieren. Sie ist nichttrivial für jeden Anfangswert  $\bar{x}_1(0) \neq 0$  und sie erfüllt  $\Delta QMW^u(\cdot) = 0$  in (4.52) wegen  $\delta \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , was der Eindeutigkeit der optimalen Lösung (4.48) widerspricht.  $\square$

Drei Bemerkungen zu diesem Hauptresultat sind angebracht:

**Bemerkung 4.1.** Die Definition 2.5 des quadratischen Mittelwertes, S. 21, impliziert, dass die Differenz der Kosten

$$\Delta J_T^u(\cdot) = J_T^u((\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))) - J_T^u((\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))) \quad (4.60)$$

zwischen einer eindeutigen optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  aus (4.48) nach Satz 4.2 und jeder anderen zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))$  gemäß Definition 4.1 mit der Länge  $T$  des Horizontes linear zunimmt. D. h., die Kostendifferenz  $\Delta J_T^u(\cdot)$  ist von der Ordnung<sup>14)</sup>  $\mathcal{O}(T)$  für  $T \rightarrow \infty$ . Dies ist ein sehr starkes Optimalitätskriterium über unendliche Horizonte. Damit ist auch nachgewiesen, dass eine eindeutige optimale Lösung (4.48) unter allen zulässigen Lösungen ein eindeutiges optimales stationäres Verhalten nach Definition 2.4, S. 20, darstellt. Wie es sich damit verhält, wenn die Eindeutigkeit nicht mehr gewährleistet ist, klärt die nächste Bemerkung.

**Bemerkung 4.2.** Wenn die Bedingung (4.51) nicht eingehalten wird, dann kann mithilfe einer optimalen Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}})$  über die zulässige Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$ , wobei  $\delta \mathbf{\Pi}_x \neq \mathbf{0}$  die beiden Gleichungen  $\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}} \delta \mathbf{\Pi}_x$  und  $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{C}} \delta \mathbf{\Pi}_x$  erfüllt, jede andere optimale Lösung durch  $((\mathbf{\Pi}_x^u + \delta \mathbf{\Pi}_x) \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}})$  erzeugt werden. Dies ergibt sich aus der Fallunterscheidung des Beweises von Satz 4.2. Aus dem Satz 4.2 folgt bereits, dass die Differenz  $\Delta QMW^u(\cdot)$  zwischen zwei beliebigen verschiedenen optimalen Lösungen gleich null ist. Da wegen der obigen Überlegung  $\mathbf{u}_s^*(\cdot) = \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  für alle diese optimalen Lösungen identisch ist, resultiert, dass auch die Differenz der Kosten  $\Delta J_T^u(\cdot)$  zwischen zwei beliebigen verschiedenen optimalen Lösungen gleich null ist. Unter Berücksichtigung der vorangegangenen Bemerkung bedeutet dies, dass jede optimale Lösung aus dem Satz 4.2 in diesem Sinne ein optimales stationäres Verhalten aufweist.

<sup>14)</sup> Siehe hierzu Definition A.4 in Anhang A.1, S. 216.

**Bemerkung 4.3.** Wird das Exosystem in der intuitiven Zustandsraumdarstellung aus Abschnitt 3.6 angegeben, dann ist es möglich, wie in Lemma 3.3 das Minimum  $QMW^u(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des quadratischen Mittelwertes (4.11) mittels Gl. (3.159) für einen gegebenen Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  zu berechnen. Hierzu müssen lediglich die unteren  $m$ -Zeilen der Funktion  $\mathbf{G}(\Pi_x^u, \mathbf{F}^u)$  in (3.156) bestimmt werden. Deren Lemma 3.3 entsprechende spaltenweise Unterteilung wird dann in (3.159) eingesetzt.

### Hinreichende Bedingung zur Existenz für beliebige Exosysteme

Um die Lösbarkeit der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  zu garantieren, wird die in der Literatur zur Output Regulation Theorie, wie z. B. [89, 95, 140], bekannte *Nicht-Resonanz-Bedingung*<sup>15)</sup> verwendet. Sie lautet:

**Annahme 4.3** (Nicht-Resonanz-Bedingung). Für jeden Eigenwert des Exosystems  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  ist die Bedingung

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = n + p \quad (4.61)$$

erfüllt.

Diese Bedingung verlangt offensichtlich, dass die Anzahl  $m$  der Stellgrößen  $\mathbf{u}$  größer oder gleich der Anzahl  $p$  der Ausgänge  $\mathbf{y}$  ist und die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  vollen Rang  $p$  besitzt. Sie besagt, dass keine invariante Nullstelle des Systems (4.1) mit einem Eigenwert des Exosystems übereinstimmt, vergleiche hierzu Anhang B.3, S. 222.

Aus [89, Theorem 1.9] ist bekannt, dass die herkömmlichen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  *genau dann* für alle beliebigen Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  und  $\bar{\mathbf{C}}$  gelöst werden können, wenn die Annahme 4.3 erfüllt ist. Unter Berücksichtigung von Satz 4.1 folgt sofort die erste Aussage von

**Korollar 4.1.** *Die Annahmen 4.1 und 4.2 seien erfüllt. Für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  und  $\bar{\mathbf{C}}$ , sind die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  dann und nur dann lösbar, wenn die Annahme 4.3 erfüllt wird. Ihre Lösung ist genau dann eindeutig, wenn zusätzlich die Bedingung (4.51) zutrifft.*  $\square$

Die zweite Aussage dieses Korollars lässt sich mithilfe des Beweises zum Satz 4.1 anhand der Gl. (F.24) und (F.27), S. 256, nachvollziehen.

<sup>15)</sup>Der Name ist so zu verstehen, dass bei Verletzung dieser Bedingung bestimmte Anregungen  $\mathbf{B}\mathbf{F}\bar{\mathbf{x}}$  der Systemdynamik (4.1a) keinen Einfluss auf den Ausgang  $\mathbf{y}$  haben.

Aus dem Korollar 4.1 folgt, dass unter der Annahme 4.3 die optimale Lösung (4.48) aus dem Satz 4.2 immer existiert. Diese Annahme ist somit hinreichend für die Existenz einer optimalen Lösung des Problems OORP 4.1.

**Bemerkung 4.4.** Sobald die Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  eine Lösung besitzen und die Bedingung (4.51) zutrifft, ist es nachweisbar, dass die Lösung der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  auf ein eindeutiges Paar  $(\Pi_x^u, F^u)$  mit  $F^u = -R^{-1}B^T\Pi_\phi^u$  gemäß Satz 4.2 führt. Wäre dies nicht der Fall, so würde dies nämlich im Widerspruch zur bewiesenen Aussage zur Eindeutigkeit der optimalen Lösung im Satz 4.2 stehen. Die Annahme 4.3 stellt lediglich noch sicher, dass auch die Wahl von  $\Pi_\phi^u$  und  $F_\phi^u$  eindeutig ist.

### Überaktuierte Systeme haben im Allgemeinen für jedes beliebige Exosystem eine optimale Lösung

Aus [53] geht hervor, dass, außer in Sonderfällen, Systeme mit unterschiedlich vielen Stellgrößen und Ausgängen keine invarianten Nullstellen besitzen. Nach [53, Theorem 5] haben „fast alle“<sup>16)</sup> Systeme, die die Bedingung

$$\text{rang}(\mathbf{B}) = m \neq p = \text{rang}(\mathbf{C}) \quad (4.62)$$

erfüllen, keine invarianten Nullstellen. Die Annahme 4.3 ist damit für „fast alle“ überaktuierten Systeme mit  $m > p$ , für die die Lösung des Problems OORP 4.1 und damit der Satz 4.2 von hohem Interesse sind, unabhängig von den Eigenwerten des Exosystems erfüllt.

Gemeinsam mit dem Korollar 4.1 folgt daraus die *wertvolle Erkenntnis*: Für überaktuierte Systeme existiert im Allgemeinen eine optimale Lösung (4.48) aus dem Satz 4.2 für alle beliebigen Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$ ,  $\overline{\mathbf{C}}$  sowie  $\overline{\mathbf{A}}$  unter Berücksichtigung der Annahme 4.2.

### 4.4.3 Unteraktuierte Systeme – Lösung von OORP 4.2

Wenn das System (4.1) unteraktuiert ist und die Rangbedingung  $\text{rang}(\mathbf{B}) < p$  in (4.10) gilt, dann haben die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  im Allgemeinen gar keine Lösung  $(\Pi_x, F)$ . Daher existiert

<sup>16)</sup> Für gegebene  $m \neq p$  heißt das, dass „Systeme  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$  mit einer invarianten Nullstelle entweder nicht existieren oder alle auf einer Hyperebene im Parameterraum von  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$  liegen“ [53, Theorem 5].

keine Lösung des Problems ORP 4.1 und es gibt keine exakte Folgeregung. Dann stellt sich die Frage F2) aus Abschnitt 4.1, S. 147, und eine Lösung

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.63)$$

des Problems OORP 4.2, S. 149, wird gesucht. Dieser Abschnitt zeigt, wie eine optimale Lösung mittels algebraischer Gleichungen berechnet werden kann, die bereits unter schwachen Annahmen für beliebige Exosysteme existiert und dann auch eindeutig ist. Dabei wird die Rangbedingung (4.10) *nicht vorausgesetzt*. Alle Resultate dieses Abschnittes können daher auf beliebige Systeme angewendet werden, für die die Frage F2) bzw. das Problem OORP 4.2 relevant sind.

### Entwurfsgleichungen

Vergleicht man das Kostenfunktional  $J_T^y(\cdot)$  in (4.15) mit  $J_T(\cdot)$  in (4.17), so fällt auf, dass beide für jedes gegebene Paar  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$ , das die Sylvestergleichung (4.5a) löst, und jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  übereinstimmen, falls  $\rho = 1$  und  $\mu = 0$  gewählt werden. Für diese Wahl kann die Variationsrechnung genau wie in Abschnitt 4.4.1 durchgeführt werden, wobei jede stationäre Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$  zulässig ist, die die Sylvestergleichung (4.23) löst. Substituiert man dementsprechend  $\rho = 1$  und  $\mu = 0$  in den Gleichungen (4.32), so erhält man die *neuen Regulatorgleichungen*  $(\mathcal{RG}^y)$ :

$$(\mathcal{RG}^y) \quad \begin{cases} \mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x^y + \mathbf{B} \mathbf{F}^y + \mathbf{E}_d, & (4.64a) \\ \mathbf{\Pi}_\phi^y \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \mathbf{\Pi}_\phi^y - \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^y + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}), & (4.64b) \\ \mathbf{0} = -\mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi^y. & (4.64c) \end{cases}$$

Aus der Herleitung von Abschnitt 4.4.1 folgt, dass jedes so bestimmte Tripel  $(\mathbf{\Pi}_x^y, \mathbf{\Pi}_\phi^y, \mathbf{F}^y)$  eine zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  liefert, die die Bedingungen (4.30) erfüllt und das Lemma 4.1, S. 161, ist anwendbar, wie gewünscht.

### Eine Lösung existiert fast immer für unteraktuierte Systeme

Im Abschnitt 4.4.2 wurde nachgewiesen, dass die dort hergeleiteten Entwurfsgleichungen immer eine Lösung haben, falls das Problem OORP 4.1, S. 148, lösbar ist. Hierzu wurden die klassischen Regulatorgleichungen als notwendige Existenzbedingungen herangezogen. Allerdings gibt es keine solchen adäquaten Existenzbedingungen für das Problem OORP 4.2, S. 148. Die Ursache hierfür wurde bereits in Abschnitt 4.4.1 diskutiert:

Die Optimalitätsbedingungen aus Satz 2.3, S. 48, bzw. [76], auf denen die neuen Gleichungen (4.64) basieren, sind nicht mehr zwingend notwendig durch die Einschränkung der zulässigen Lösungen auf ein stationäres Verhalten gemäß Definition 4.1, S. 149. Das Hauptresultat dieses Abschnittes konzentriert sich daher auf den Nachweis, dass, wann immer eine Lösung der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  existiert, diese auch zu einer optimalen Lösung des Problems OORP 4.2 führt.

Aus diesem Grund, wird an dieser Stelle eine schwache Annahme angegeben, die eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  für beliebige Exosysteme ist. In Anlehnung an den Abschnitt 4.4.2 wird die folgende Annahme als *Nicht-Resonanz-Bedingung* bezeichnet:

**Annahme 4.4** (Nicht-Resonanz-Bedingung). Für jeden Eigenwert des Exosystems  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  ist die Bedingung

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = n + m \quad (4.65)$$

erfüllt.

Diese Annahme verlangt offensichtlich, dass gleich viele oder mehr Ausgänge als Stellgrößen vorliegen. Wie die Annahme 4.3 stellt sie sicher, dass keine invarianten Nullstellen des Systems (4.1) mit Eigenwerten des Exosystems zusammenfallen, siehe auch Anhang B.3. Weiterhin ist es erforderlich, dass die Eingangsmatrix vollen Rang hat:  $\text{rang}(\mathbf{B}) = m$ . Dies ist allerdings nur eine scheinbare Einschränkung und kann immer mit Methoden der Control Allocation erreicht werden, wie es Bemerkung 4.5 am Ende dieses Absatzes darlegt.

Der folgende Satz zeigt, dass die Nicht-Resonanz-Bedingung 4.4 hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  ist.

**Satz 4.3.** Die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  sind genau dann für alle beliebigen Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  und  $\bar{\mathbf{C}}$  eindeutig lösbar, falls die Annahmen 4.1, 4.2 und 4.4 zutreffen.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt in Anhang F.3, ab S. 256. □

Der Diskussion in Abschnitt 4.4.2 folgend, haben nach [53] „fast alle“<sup>17)</sup> unteraktuierten Systeme  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ , für die die Ungleichung

$$\text{rang}(\mathbf{B}) = m < p = \text{rang}(\mathbf{C}) \quad (4.66)$$

<sup>17)</sup>Siehe hierzu Fußnote 16), S. 171.



zutrifft, gar keine invarianten Nullstellen. Bis auf Sonderfälle trifft demnach für den hier relevantesten Fall die Annahme 4.4 für beliebige Exosysteme zu. Dies liefert die *wertvolle Erkenntnis*: Die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  haben unter Berücksichtigung der Annahme 4.2 für unteraktuierte Systeme im Allgemeinen eine eindeutige Lösung für alle beliebigen Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$ ,  $\overline{\mathbf{C}}$  sowie  $\overline{\mathbf{A}}$ .

**Bemerkung 4.5.** Die Annahme 4.4 verlangt, dass  $\mathbf{B}$  vollen Spaltenrang hat. Angenommen, dies treffe nicht zu, sondern  $\text{rang}(\mathbf{B}) < m$ . Dann ist es immer möglich, einen virtuellen Eingang  $\boldsymbol{\nu}$  einzuführen, für den

$$\mathbf{B}\mathbf{B}_\nu\boldsymbol{\nu} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.67)$$

für jedes  $\mathbf{u}$  eine Lösung hat und  $\mathbf{B}\mathbf{B}_\nu$  vollen Rang aufweist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, für einen solchen virtuellen Eingang zu prüfen, ob die Annahme 4.4 zutrifft. Ist dies der Fall, dann ist zur Implementierung lediglich die aus den Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  bestimmbare virtuelle Stellgröße  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{F}_\nu^y \bar{\mathbf{x}}$  wieder anhand der Bedingung (4.67) auf die einzelnen Stellgrößen  $u_i$  aufzuteilen. Hierzu können die üblichen Verfahren der Control Allocation angewendet werden, siehe z. B. [80, 99].

## Optimalität und Eindeutigkeit

Es folgt das fünfte Hauptresultat dieser Arbeit:

**Satz 4.4** (Lösung des Problems OORP 4.2). *Die Annahmen 4.1 und 4.2 aus Abschnitt 4.1 seien erfüllt. Außerdem sei angenommen, dass ein Tripel  $(\boldsymbol{\Pi}_x^y, \boldsymbol{\Pi}_\phi^y, \mathbf{F}^y)$  existiert, das die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  in (4.64) löst. Für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist dann die zulässige Lösung*

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\boldsymbol{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.68)$$

*eine optimale Lösung zum Problem OORP 4.2, d. h., sie minimiert den quadratischen Mittelwert  $QMW^y(\cdot)$  in (4.14)*

$$QMW^y(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) := \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2T} \int_0^T (\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t))^T \mathbf{Q} (\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)) dt \right).$$

*Die optimale Lösung ist genau dann eindeutig, wenn die Annahme 4.4 erfüllt ist. Sie existiert dann auch für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  und  $\overline{\mathbf{C}}$ .*

*Beweis.* Der Beweis basiert auf ähnlichen Argumenten wie der Beweis von Satz 4.2. Da ein Tripel  $(\Pi_x^y, \Pi_\phi^y, \mathbf{F}^y)$ , das die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  löst, auch die Gleichungen (4.32) für  $\rho = 1$  und  $\mu = 0$  löst, erfüllt der Kandidat  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  mit dem Kozustand  $\phi = \Pi_\phi^y \bar{\mathbf{x}}$  die Bedingungen (4.30) für  $\rho = 1$  und  $\mu = 0$ . Daher ist es möglich, das Lemma 4.1 anzuwenden. Für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und jede zulässige Lösung  $(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , die immer durch eine stationäre Variation  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) = (\delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  aus dem Kandidaten mittels der Sylvestergleichung (4.23) erzeugt werden kann, gilt somit

$$\Delta QMW^y(\cdot) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}^\top \delta \Pi_x^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}} dt. \quad (4.69)$$

Daraus und aus  $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$  folgt, dass die Differenz der quadratischen Mittelwerte die Ungleichung  $\Delta QMW^y(\cdot) \geq 0$  für jede zulässige stationäre Variation  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot))$  und jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  erfüllt. Dies belegt, dass die Lösung  $(\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  den quadratischen Mittelwert minimiert.

Im zweiten Teil des Beweises, wird gezeigt, dass die Annahme 4.4 hinreichend und notwendig für die Eindeutigkeit der optimalen Lösung ist.

Wenn die Annahme 4.4 zutrifft, dann gilt  $\Delta QMW^y(\cdot) > 0$  für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  und jede nichttriviale zulässige Variation  $(\delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , woraus die Eindeutigkeit der optimalen Lösung (4.68) resultiert. Dies wird bewiesen, indem die Differenz (4.69) mithilfe von Lemma F.1 anhand der Beobachtbarkeit des künstlichen Systems  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \Pi_x, \bar{\mathbf{A}})$  mit dem reellen Ausgang  $\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}$ , wobei  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{1/2}^\top \mathbf{Q}_{1/2}$  sei, analysiert wird. Hierzu lässt sich jedes Paar  $(\delta \Pi_x, \delta \mathbf{F})$ , das die Sylvestergleichung (4.23) löst, einem der folgenden drei Fälle zuordnen:

**Fall 1.** Angenommen, für ein zulässiges Paar  $(\delta \Pi_x, \delta \mathbf{F})$  sei das künstliche System  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \Pi_x, \bar{\mathbf{A}})$  vollständig beobachtbar. Aus dem Fall (F.2a) von Lemma F.1, S. 251, folgt für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{0}$  die Ungleichung  $\Delta QMW^y(\cdot) > 0$  für jede solche Variation  $(\delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ .

**Fall 2.** Für die nichttriviale Variation  $(\delta \Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  seien  $n_B$  Eigenwerte von  $\bar{\mathbf{A}}$  im künstlichen System

$$(\mathbf{G}, \bar{\mathbf{A}}) := (\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \Pi_x, \bar{\mathbf{A}}) \quad (4.70)$$

beobachtbar, wobei  $0 < n_B < \bar{n}$  gelte. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist es möglich vorauszusetzen, dass das Exosystem (4.2a) mit dem reellen Ausgang  $\mathbf{G} = \mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}$  bereits in die Form der Zerlegung (F.1) aus Lemma F.1 überführt wurde,<sup>18)</sup> die das Exosystem in ein vollständig beobachtbares und ein nicht beobachtbares Teilsystem aufteilt. Aus der Struktur von  $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{0}]$  dieser Zerlegung resultiert

$$\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x = [\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_{x,1} \quad \mathbf{0}] \quad (4.71)$$

mit  $\delta \mathbf{\Pi}_{x,1} \in \mathbb{C}^{n \times n_B}$ , wobei  $\delta \mathbf{\Pi}_x = [\delta \mathbf{\Pi}_{x,1} \quad \delta \mathbf{\Pi}_{x,2}]$  entsprechend aufgeteilt sei. Auf Basis der Invertierbarkeit von  $\mathbf{Q}_{1/2}$  erhält man  $\mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2} = \mathbf{0}$ . Die Systemmatrix zur Zerlegung (F.1) lautet  $\bar{\mathbf{A}} = \text{diag}(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{22})$ . Es sei nun  $\delta \mathbf{F} = [\delta \mathbf{F}_1 \quad \delta \mathbf{F}_2]$ . Dann muss jedes zulässige Paar  $(\delta \mathbf{\Pi}_{x,2}, \delta \mathbf{F}_2)$  die Regulatorgleichungen

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2} \bar{\mathbf{A}}_{22} &= \mathbf{A} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2} + \mathbf{B} \delta \mathbf{F}_2, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_{x,2} \end{aligned} \quad (4.72)$$

erfüllen. Da die Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  diagonal ist, müssen daher alle Spalten  $\delta \pi_{x,2,i}$  von  $\delta \mathbf{\Pi}_{x,2}$  und  $\delta \mathbf{f}_{2,i}$  von  $\delta \mathbf{F}_2$  die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_i \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \pi_{x,2,i} \\ \delta \mathbf{f}_{2,i} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.73)$$

lösen, wobei  $\bar{\lambda}_i$  der  $i$ -te Eintrag der Diagonalen von  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  und somit ein Eigenwert von  $\bar{\mathbf{A}}$  ist. Durch die Annahme 4.4 hat die Matrix in (4.73) für jedes  $\bar{\lambda}_i$  vollen Spaltenrang, was für alle Spalten  $\delta \pi_{x,2,i} = \mathbf{0}$  und  $\delta \mathbf{f}_{2,i} = \mathbf{0}$  impliziert. Daraus folgt  $(\delta \mathbf{\Pi}_{x,2}, \delta \mathbf{F}_2) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

Unterteilt man auch den Zustandsvektor  $\bar{\mathbf{x}}^\top = [\bar{\mathbf{x}}_1^\top \quad \bar{\mathbf{x}}_2^\top]$ , so ergibt sich für die betrachtete Variation:

$$(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) = (\delta \mathbf{\Pi}_{x,1} \bar{\mathbf{x}}_1(\cdot), \delta \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(\cdot)), \quad (4.74)$$

wobei das Paar  $(\delta \mathbf{\Pi}_{x,1}, \delta \mathbf{F}_1)$  die Sylvestergleichung

$$\delta \mathbf{\Pi}_{x,1} \bar{\mathbf{A}}_{11} = \mathbf{A} \delta \mathbf{\Pi}_{x,1} + \mathbf{B} \delta \mathbf{F}_1 \quad (4.75)$$

erfüllt. Die Variation ist nur dann nicht trivial, falls  $\bar{\mathbf{x}}_1(0) \neq \mathbf{0}$  zutrifft. Hieraus ergibt sich jedoch  $\Delta Q M W^y(\cdot) > 0$  aufgrund von Lemma F.1, da das künstliche Teilsystem  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_{x,1}, \bar{\mathbf{A}}_{11})$  vollständig beobachtbar ist.

<sup>18)</sup> Dies ist immer durch eine Zustandstransformation erreichbar.

Daraus schließt man: Jede nichttriviale zulässige stationäre Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , für die einige aber nicht alle Eigenwerte von  $\bar{\mathbf{A}}$  im künstlichen Systems  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x, \bar{\mathbf{A}})$  beobachtbar sind, führt zu einer Differenz (4.52) mit  $\Delta QMW^u(\cdot) > 0$ , wenn die Annahme 4.4 erfüllt ist.

**Fall 3.** Sei nun  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  eine beliebige zulässige Variation, für die kein Eigenwert von  $\bar{\mathbf{A}}$  im künstlichen System  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x, \bar{\mathbf{A}})$  beobachtbar ist. Aus der Invertierbarkeit von  $\mathbf{Q}_{1/2}$  folgt  $\mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x = \mathbf{0}$  und das Paar  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$  muss die Regulatorgleichungen

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \delta \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{B} \delta \mathbf{F}, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x \end{aligned} \quad (4.76)$$

erfüllen. Analog zum Fall 2 führt dies zu  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  wegen der erfüllten Annahme 4.4. Es liegt daher immer eine triviale Variation  $(\delta \mathbf{x}_s(\cdot), \delta \mathbf{u}_s(\cdot)) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  vor, die für die Eindeutigkeit der optimalen Lösung keine Rolle spielt.

Die Notwendigkeit der Annahme 4.4 für die Eindeutigkeit der optimalen Lösung (4.68) wird per Widerspruch nachgewiesen. Hierfür sei angenommen, dass die optimale Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  eindeutig ist, obwohl die Bedingung (4.65) nicht für jeden Eigenwert  $\bar{\lambda}$  von  $\bar{\mathbf{A}}$  eingehalten wird. Es gibt folglich einen Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$ , zu dem ein Paar  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \ni (\delta \mathbf{\pi}_x, \delta \mathbf{f}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  existiert, das die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{\pi}_x \\ \delta \mathbf{f} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.77)$$

löst. Aufgrund der Annahme 4.2 seien wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  diagonal und der Eigenwert  $\bar{\lambda}$  das erste Element auf deren Diagonalen. Der zugehörige Zustand des Exosystems ist  $\bar{x}_1$ . Bezogen auf das skalare Teilsystem  $\dot{\bar{x}}_1 = \bar{\lambda} \bar{x}_1$  des Exosystems (4.2a) erfüllt das Paar  $(\delta \mathbf{\pi}_x, \delta \mathbf{f})$  die Sylvestergleichung (4.23) und  $\mathbf{C} \delta \mathbf{\pi}_x = \mathbf{0}$  gemäß (4.77). Für jeden Anfangswert  $\bar{x}_0$  kann daher die zulässige stationäre Variation

$$(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(t), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t)) \equiv (\delta \mathbf{\pi}_x \bar{x}_1(t), \delta \mathbf{f} \bar{x}_1(t)) \quad (4.78)$$

konstruiert werden. Sie ist nichttrivial für jeden Anfangswert  $\bar{x}_1(0) \neq 0$  und führt zur Differenz  $\Delta QMW^u(\cdot) = 0$  in (4.52) da  $\mathbf{C} \delta \mathbf{\pi}_x = \mathbf{0}$ , was jedoch der Eindeutigkeit der optimalen Lösung (4.48) widerspricht.  $\square$

Es folgen drei Bemerkungen:

**Bemerkung 4.6.** Analog zur Bemerkung 4.1, S. 169, nimmt auch hier die Kostendifferenz

$$\Delta J_T^y(\cdot) = J_T^y((\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))) - J_T^y((\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))) \quad (4.79)$$

zwischen einer eindeutigen optimalen Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  aus (4.68) und jeder dazu verschiedenen zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot))$  mit der Länge  $T$  des Horizontes linear zu. D. h.,  $\Delta J_T^y(\cdot)$  ist von der Ordnung<sup>19)</sup>  $\mathcal{O}(T)$  für  $T \rightarrow \infty$ . Daraus folgt, dass eine eindeutige optimale Lösung ein optimales stationäres Verhalten nach Definition 4.1, S. 149, unter allen verschiedenen zulässigen Lösungen aufweist.

**Bemerkung 4.7.** Aus dem Beweis von Satz 4.4 folgt, dass die Differenz  $\Delta QMW^y(\cdot)$  nur dann für eine Variation

$$(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = (\mathbf{x}_s^*(\cdot) + \delta \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot) + \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.80)$$

einer optimalen Lösung gleich null ist, falls  $\mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$  für den gegebenen Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  erfüllt wird. Jede solche Variation ist ebenfalls eine optimale Lösung. Insbesondere gilt

$$\mathbf{x}_s(t)^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x}_s(t) \equiv \mathbf{x}_s^*(t)^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x}_s^*(t). \quad (4.81)$$

Daher ist auch hier, wie in der Bemerkung 4.2, S. 169, die Differenz  $\Delta J_T^y(\cdot)$  zwischen zwei beliebigen optimalen Lösungen gleich null. Wegen der vorangestellten Bemerkung weist daher jede optimale Lösung aus Satz 4.4 ein optimales stationäres Verhalten auf, wenn man Gl. (2.16) in Definition 2.4, S. 20, durch  $\mathbf{C}(\mathbf{\Pi}_x - \mathbf{\Pi}_x^*)\bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$  ersetzt.

**Bemerkung 4.8.** Liegt das Exosystem in der intuitiven Zustandsraumdarstellung aus Abschnitt 3.6 vor, dann ist es auch hier möglich, für einen gegebenen Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  das Minimum  $QMW^y(\mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des quadratischen Mittelwertes (4.14) mittels Gl. (3.159) wie in Lemma 3.3 zu berechnen. Hierfür müssen nur die oberen  $p$  Zeilen der Funktion  $\mathbf{G}(\mathbf{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$  in (3.156) bestimmt werden. Diese werden spaltenweisen entsprechend Lemma 3.3 unterteilt und in (3.159) eingesetzt.

<sup>19)</sup>Siehe hierzu Definition A.4 in Anhang A.1, S. 216.

#### 4.4.4 Zusammenhang zu einem optimalen Folgeregelungsproblem $\text{OFP}_\infty 4.1$

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, wie die Probleme OORP 4.1 und OORP 4.2 als Sonderfälle aus dem allgemeineren optimalen Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  hervorgehen. Dies ordnet die beiden Probleme als auch das klassische Output Regulation Problem ORP 4.1 in den größeren Zusammenhang der optimalen Folgeregelungen ein. Dieser Einblick ist beispielsweise nützlich, wenn es in der Praxis ausreicht, den stationären Folgefehler  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}$  (beliebig) klein zu halten, anstatt die Nebenbedingung  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{0}$  aus (4.13) exakt zu erfüllen, oder wenn auch die Eingangsenergie im Kostenfunktional  $J_T^y(\cdot)$  in (4.15) berücksichtigt werden soll, ggf. durch eine (beliebig) kleine Gewichtung.

In dieser Hinsicht berücksichtigt das Kostenfunktional  $J_T(\cdot)$  aus (4.17) im Problem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  (für  $\mu = 1$ ) den Folgefehler  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}$ , indem dessen Fehlerenergie zur Stellenergie  $J_T^u(\cdot)$  im Problem OORP 4.1 addiert wird:

$$J_T(\cdot) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}})^\top \rho \mathbf{Q} (\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}) dt + J_T^u(\cdot). \quad (4.82)$$

Die Zustandsbeschränkung  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{0}$  aus (4.13) wird daher im Problem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  nicht mehr als explizite Nebenbedingung, sondern nur implizit durch die Fehlerenergie im Gütefunktional berücksichtigt.<sup>20)</sup> Es leuchtet ein, dass eine immer höhere Gewichtung  $\rho$  zu immer kleineren stationären Folgefehlern führen wird. Als erster Beitrag des sechsten Hauptresultats wird unter üblichen Voraussetzungen gezeigt, dass der stationäre Folgefehler durch den Übergang  $\rho \rightarrow \infty$  verschwinden muss und das Problem OORP 4.1 als Spezialfall aus dem Problem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  hervorgeht.

Auf analoge Weise resultiert das Problem OORP 4.2 als Sonderfall aus dem Problem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  (für  $\rho = 1$ ) durch den Übergang  $\mu \rightarrow 0$ . Mit sinkendem  $\mu$  nimmt die Stellenergie im Kostenfunktional aus (4.17)

$$J_T(\cdot) = J_T^y(\cdot) + \int_0^T \mathbf{u}_s^\top \mu \mathbf{R} \mathbf{u}_s dt \quad (4.83)$$

stetig ab, bis sie letztendlich für  $\mu \rightarrow 0$  entfällt. Daher spricht man auch von einem „cheap“ optimalen Regelungsproblem. Die gängigen Verfahren

<sup>20)</sup>Für die Berücksichtigung einer Zustandsbeschränkung in Form einer solchen „Integralbestrafungsfunktion“ sei auf [39, Kap. 3.4] verwiesen.

zur Behandlung solcher Probleme aus der Literatur, wie z. B. [6, 112, 113, 133, 139, 166], setzen die Stabilisierbarkeit der berücksichtigten Dynamik voraus. Diese umfasst hier auch die Dynamik des Exosystems (4.2), die jedoch wegen der Annahme 4.2 keinesfalls stabilisierbar ist, und die genannten Verfahren sind nicht anwendbar. In [140, Kap. 17] wird mithilfe des Übergangs  $\mu \rightarrow 0$  nachgewiesen, dass das Problem OORP 4.2 unter bestimmten Annahmen lösbar ist. Eine Lösung wurde dabei jedoch nicht explizit bestimmt. Diesbezüglich trägt dieser Abschnitt eine explizite Lösung zum Problem OFP $_{\infty}$  4.1 bei und weist nach, dass deren Grenzwert für  $\mu \rightarrow 0$  die bereits explizit angegebene Lösung des Problems OORP 4.2 im Abschnitt 4.4.3 ist.

Zunächst wird neben der Annahme 4.1 zur Stabilisierbarkeit die zweite Standardannahme für optimale Folgeregelungsprobleme aus Abschnitt 3.1 zur Entdeckbarkeit aufgegriffen:

**Annahme 4.5.** Es existiert ein  $\mathbf{Q}_{1/2}$  gegeben durch  $\mathbf{Q}_{1/2}^{\top} \mathbf{Q}_{1/2} = \mathbf{Q}$ , sodass das Paar  $(\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C}, \mathbf{A})$  entdeckbar ist.

Auf Basis der Annahmen 4.1, 4.2 und 4.5 wendet man das Korollar 3.1 aus Abschnitt 3.4.2 an.<sup>21)</sup> Dieses besagt, dass die mittels der Entwurfsungleichungen aus (4.32) in Abschnitt 4.4.1

$$\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{B} \mathbf{F}^* + \mathbf{E}_d, \quad (4.84a)$$

$$\mathbf{\Pi}_{\phi} \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{\top} \mathbf{\Pi}_{\phi} - \mathbf{C}^{\top} \rho \mathbf{Q} (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}), \quad (4.84b)$$

$$\mathbf{0} = \mu \mathbf{R} \mathbf{F}^* + \mathbf{B}^{\top} \mathbf{\Pi}_{\phi}. \quad (4.84c)$$

bestimmte Lösung  $(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot))$  das optimale stationäre Verhalten zum Kostenfunktional  $J_T(\cdot)$  aus (4.17) ist. Dies führt auf das folgende Korollar. Dessen Aussage wurde bereits im Rahmen des Satzes 3.8 in Abschnitt 3.6 verwendet.

**Korollar 4.2.** Die Annahmen 4.1, 4.2 und 4.5 seien erfüllt. Es sei das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*(\rho, \mu), \mathbf{F}^*(\rho, \mu))$  die Lösung von (4.84) in Abhängigkeit der Parameter  $\rho, \mu > 0$ . Sie existiert und ist eindeutig für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d, \mathbf{D}_d, \bar{\mathbf{C}}$  und  $\bar{\mathbf{A}}$  unter Einhaltung von Annahme 4.2. Zu allen gegebenen  $\rho, \mu > 0$  und jedem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ist die zulässige Lösung

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\mathbf{\Pi}_x^*(\rho, \mu) \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^*(\rho, \mu) \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (4.85)$$

<sup>21)</sup> Es sei an Bemerkung 3.6 erinnert, wonach das Korollar 3.1 auch angewendet werden kann, wenn lediglich die schwächere Annahme 4.5 zur Entdeckbarkeit anstatt der Beobachtbarkeit erfüllt ist.

die eindeutige optimale Lösung des Problems  $OFP_{\infty}4.1$ , die den quadratischen Mittelwert  $QMW(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_T(\cdot)$  zum Kostenfunktional  $J_T(\cdot)$  aus (4.17) minimiert.

*Beweis.* Für alle  $\rho, \mu > 0$  ist festzustellen, dass die Entwurfsgleichungen (4.84) äquivalent zur Sylvestergleichung (3.13) sind, wenn letztere für das Kostenfunktional (4.17) aufgestellt wird. Nach Satz 3.1 hat diese immer eine eindeutige Lösung, aus der das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*(\rho, \mu), \mathbf{F}^*(\rho, \mu))$  bestimmt wird. Auf Basis der getroffenen Annahmen sind die Voraussetzungen des Korollars 3.1 unter Berücksichtigung der Bemerkung 3.6 erfüllt. Daher stellt die Lösung (4.85) ein optimales stationäres Verhalten dar. Unter Einbezug der Definition 2.4 des optimalen stationären Verhaltens, S. 20, und der Definition 2.5 der QMW Optimalität, S. 21, resultiert hieraus für jede verschiedene zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  eine Differenz

$$\Delta QMW(\cdot) = QMW(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) - QMW(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) \geq 0. \quad (4.86)$$

Damit ist die Optimalität der Lösung (4.85) bezüglich des Problems  $OFP_{\infty}4.1$  gezeigt.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit wird  $\Delta QMW(\cdot) > 0$  für die Differenz aus (4.86) belegt. Hierzu bestimmt man mittels der Variationsrechnung aus Abschnitt 4.4.1 die Differenz

$$\Delta QMW(\cdot) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}^\top (\delta \mathbf{\Pi}_x^\top \mathbf{C}^\top \rho \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x + \delta \mathbf{F}^\top \mu \mathbf{R} \delta \mathbf{F}) \bar{\mathbf{x}} \, dt \quad (4.87)$$

für ein beliebiges zulässiges Paar  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F})$ , das die Sylvestergleichung (4.23) erfüllt, und somit für eine beliebige zulässige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ . Wie aus den Fallstudien der Beweise zu Satz 4.2 und Satz 4.4 hervorgeht, muss aufgrund von Lemma F.1, S. 251, eine zulässige Variation  $(\delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  sowohl  $\mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} \delta \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$  als auch  $\mathbf{R}_{1/2} \delta \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$  erfüllen, damit  $\Delta QMW(\cdot) = 0$  zutrifft. Die optimale Lösung (4.85) ist nur dann nicht eindeutig, falls dies für eine nichttriviale Variation möglich ist.

Auf Basis der Annahme 4.2 liege die Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  des Exosystems (4.2a) ohne Beschränkung der Allgemeinheit in Diagonalform vor. Dann muss analog zum zweiten Fall der genannten Fallstudien die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{Q}_{1/2} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\pi} \\ \delta \mathbf{f} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.88)$$



eine nichttriviale Lösung  $(\delta\boldsymbol{\pi}, \delta\mathbf{f}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  für wenigstens einen Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  haben. Die Invertierbarkeit von  $\mathbf{Q}_{1/2}$  und  $\mathbf{R}_{1/2}$  impliziert sofort  $\delta\mathbf{f} = \mathbf{0}$  und daher auch

$$\delta\boldsymbol{\pi}^\top [\bar{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top \quad \mathbf{C}^\top] = \mathbf{0}. \quad (4.89)$$

Auf Basis der Annahme 4.5 gilt die Bedingung (4.51), die besagt, dass die Matrix in (4.89) vollen Zeilenrang für jedes  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  hat. Daraus folgt  $\delta\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ . Um  $\Delta QMW(\cdot) = 0$  zu erfüllen, muss die Variation trivial sein. Im Umkehrschluss führt jede nichttriviale Variation zu  $\Delta QMW(\cdot) > 0$  und die optimale Lösung (4.85) ist eindeutig.  $\square$

Das sechste Hauptresultat dieser Arbeit etabliert die Probleme OORP 4.1 und OORP 4.2 als Sonderfälle des optimalen Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 4.1$ . Hierdurch werden die bisher präsentierten Ergebnisse zur optimalen Output Regulation in die Theorie optimaler Folgeregelungen über unendliche Horizonte eingebettet. Dabei wird das Landausche Symbol<sup>22)</sup>  $\mathcal{O}$  aus Definition A.4, S. 216, verwendet, um eine quantitative Aussage zur Konvergenz zu machen.

**Satz 4.5.** *Es seien die Annahmen 4.1, 4.2 aus Abschnitt 4.1 und Annahme 4.5, S. 180, erfüllt. Gemäß Korollar 4.2 sei die eindeutige optimale Lösung  $(\boldsymbol{\Pi}_x^*(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^*(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des Problems  $\text{OFP}_\infty 4.1$  für alle  $\rho > 0$  und  $\mu > 0$  gegeben.*

- a) *Falls die Nicht-Resonanz-Bedingung in Annahme 4.3, S. 170, zutrifft, dann gilt für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  sowie  $\bar{\mathbf{C}}$  und für  $\rho \rightarrow \infty$*

$$\|\boldsymbol{\Pi}_x^*(\rho, 1) - \boldsymbol{\Pi}_x^u\|_F = \mathcal{O}(1/\rho), \quad (4.90a)$$

$$\|\mathbf{F}^*(\rho, 1) - \mathbf{F}^u\|_F = \mathcal{O}(1/\rho), \quad (4.90b)$$

wobei das Paar  $(\boldsymbol{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$  die eindeutige optimale Lösung (4.48) des Problems OORP 4.1 gemäß Satz 4.2, S. 165, bestimmt. Daher gilt

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\Pi}_x^*(\rho, 1) - \boldsymbol{\Pi}_x^u\|_F = \mathbf{0}, \quad (4.91a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|\mathbf{F}^*(\rho, 1) - \mathbf{F}^u\|_F = \mathbf{0}. \quad (4.91b)$$

<sup>22)</sup>Man schreibt  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$ , wenn in einer Umgebung von  $x_0$  der Betrag von  $g(x)$  multipliziert mit einer Konstanten eine Einhüllende des Betrages von  $f(x)$  bildet. Konvergiert z. B.  $|g(x)|$  gegen null für  $x \rightarrow x_0$ , so konvergiert  $|f(x)|$  mindestens mit der selben Rate wie  $|g(x)|$  gegen null.

b) Falls die Nicht-Resonanz-Bedingung in Annahme 4.4, S. 173, zutrifft, dann gilt für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  sowie  $\overline{\mathbf{C}}$  und für  $\mu \rightarrow 0$

$$\|\Pi_x^*(1, \mu) - \Pi_x^y\|_F = \mathcal{O}(\mu), \quad (4.92a)$$

$$\|\mathbf{F}^*(1, \mu) - \mathbf{F}^y\|_F = \mathcal{O}(\mu), \quad (4.92b)$$

wobei das Paar  $(\Pi_x^y, \mathbf{F}^y)$  die eindeutige optimale Lösung (4.68) des Problems OORP 4.2 gemäß Satz 4.4, S. 174, bestimmt. Daraus folgt

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|\Pi_x^*(1, \mu) - \Pi_x^y\|_F = \mathbf{0}, \quad (4.93a)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \|\mathbf{F}^*(1, \mu) - \mathbf{F}^y\|_F = \mathbf{0}. \quad (4.93b)$$

*Beweis.* Die Aussagen a) und b) werden mithilfe von Lemma F.2 aus Anhang F.4, S. 259, bewiesen. Hierzu wird gezeigt, dass die Entwurfsgleichungen (4.84) für das Paar  $(\Pi_x^*(\rho, \mu), \mathbf{F}^*(\rho, \mu))$  durch eine Störung in Abhängigkeit der Parameter  $\rho$  und  $\mu$  aus den Entwurfsgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  in (4.47) bzw.  $(\mathcal{RG}^y)$  in (4.64) hervorgehen.

Zur Aussage a) betrachtet man das Problem OFP<sub>∞</sub> 4.1 für  $\mu = 1$  und  $\rho > 0$ . Auf Basis von (4.84c) wird das Vorfilter durch

$$\mathbf{F}^*(\rho, 1) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi(\rho, 1) \quad (4.94)$$

in (4.84a) ersetzt. Daraus resultiert die bekannte Sylvestergleichung (3.13) des Hamiltonschen Systems (3.10):

$$\begin{bmatrix} \Pi_x^*(\rho, 1) \\ \Pi_\phi(\rho, 1) \end{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{C}^\top \rho \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_x^*(\rho, 1) \\ \Pi_\phi(\rho, 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{C} \rho \mathbf{Q} (\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{D}_d) \end{bmatrix}. \quad (4.95)$$

Nun wird eine Hilfsvariable  $\mathbf{F}_\phi(\rho): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p \times \bar{n}}$  eingeführt, mit Hilfe derer man

$$\mathbf{F}_\phi(\rho) = -\rho \mathbf{Q} (\mathbf{C} \Pi_x^*(\rho, 1) + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}}) \quad (4.96)$$

substituiert. Hieraus resultiert das äquivalente Gleichungssystem

$$\Pi_\phi(\rho, 1) \overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \Pi_\phi(\rho, 1) + \mathbf{C}^\top \mathbf{F}_\phi(\rho), \quad (4.97a)$$

$$\Pi_x^*(\rho, 1) \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x^*(\rho, 1) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi(\rho, 1) + \mathbf{E}_d, \quad (4.97b)$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \Pi_x^*(\rho, 1) + \mathbf{D}_d + \frac{1}{\rho} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F}_\phi(\rho). \quad (4.97c)$$

Dieses geht offensichtlich aus den Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  hervor, wenn in deren letzten Gleichung (4.47c) die Störung  $\frac{1}{\rho} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{F}_\phi(\rho)$  hinzugefügt wird. Die

Gleichungssysteme  $(\mathcal{RG}^u)$  und (4.97) können in der Form (F.38) bzw. in der gestörten Form (F.39) aus Lemma F.2 dargestellt werden. Aus den Sätzen 3.1 und 4.1 geht unter den getroffenen Annahmen hervor, dass die Lösungen beider Gleichungen für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  sowie  $\bar{\mathbf{C}}$  und für alle  $\rho > 0$  existieren und eindeutig sind. Daher impliziert die Anwendung des Lemmas F.2 für  $\frac{1}{\rho} \rightarrow 0$  die Aussage a).

Zur Aussage b) wird das Problem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  für  $\rho = 1$  und  $\mu > 0$  betrachtet. Setzt man diese Parameter in die Entwurfsgleichungen (4.84) ein, so ist sofort ersichtlich, dass diese aus den Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  durch Hinzufügen einer Störung  $\mu \mathbf{R}\mathbf{F}^*(1, \mu)$  in deren dritten Gleichung (4.64c) hervorgehen. Beide Gleichungssysteme können wieder in der Form (F.38) bzw. (F.39) dargestellt werden. Unter den getroffenen Annahmen existieren deren eindeutige Lösungen für alle Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  sowie  $\bar{\mathbf{C}}$  und für jedes  $\mu > 0$ , wie aus den Sätzen 3.1 und 4.3 bekannt ist. Aus der Anwendung des Lemmas F.2 für  $\mu \rightarrow 0$  folgt die Aussage b).  $\square$

**Bemerkung 4.9.** Für ein sehr groß gewähltes  $\rho$  und  $\mu = 1$  wird man die selbe Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^*(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^*(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zum Problem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  erhalten wie für ein entsprechend klein gewähltes  $\mu > 0$  und  $\rho = 1$ . Beide Fälle können nämlich durch die Skalierung der Kosten  $J_T(\cdot)$  mit einem positiven Skalar, wie es beispielsweise aus der Literatur zum linear-quadratischen Regler bekannt ist, ineinander überführt werden. Für den Übergang  $\rho \rightarrow \infty$  oder stattdessen  $\mu \rightarrow 0$  ergibt sich daher der gleiche Grenzwert für das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^*(\cdot), \mathbf{F}^*(\cdot))$  – nur die zugehörigen Matrizen  $\mathbf{\Pi}_\phi(\cdot)$  werden sich unterscheiden. Daraus schließt man, dass man für  $\rho = 1$  und  $\mu \rightarrow 0$  bezüglich des Problems  $\text{OORP } 4.1$  zu einer äquivalenten Aussage wie a) in Satz 4.5 kommt. Das gleiche gilt bezüglich des Problems  $\text{OORP } 4.2$ , wofür mit  $\rho \rightarrow \infty$  und  $\mu = 1$  eine äquivalente Aussage wie b) in Satz 4.5 gefunden wird.

Wie die Diskussion am Anfang dieses Abschnittes zeigt, sind die im Satz 4.5 verfolgten Ansätze jedoch intuitiver. Außerdem erleichtern sie die Beweisführung.

## 4.5 Diskussion

In diesem Abschnitt werden die Hauptresultate aus Abschnitt 4.4 auf quadratische Systeme angewandt und so erweitert, dass auch ein Durchgriff der Stellgröße  $\mathbf{u}$  auf den Ausgang  $\mathbf{y}$  und eine zusätzliche Gewichtung des Zustandes im Kostenfunktional  $J_T^u(\cdot)$  erlaubt sind. Außerdem wird gezeigt

unter welchen Bedingungen die Hauptresultate selbst dann bestehen bleiben, wenn zulässige Lösungen  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  nach der allgemeineren Definition 2.2 betrachtet werden. Zudem wird diskutiert, welche Eigenschaften zu erwarten sind, falls die Annahme 4.2 nicht erfüllt wird. Weiterhin wird ähnlich zu Abschnitt 3.6 belegt, dass die Lösung des Problems OORP 4.1 auch mittels eines statischen Optimierungsproblems bestimmt werden kann. Dieses Optimierungsproblem wurde erstmals in [108] zur Bestimmung eines stationären Verhaltens aufgestellt, das intuitiv eine optimierte Nutzung überzähliger Aktoren erreichen soll. Hier wird zum ersten Mal bewiesen, dass dessen Lösung tatsächlich den Mittelwert der Stellenergie minimiert. Dies ist eine wichtige Erkenntnis, da das statische Optimierungsproblem trotz des bisher fehlenden Nachweises häufig in der Literatur verwendet wird, siehe z. B. [69, 70, 148].

### 4.5.1 Quadratische Systeme

Aus z. B. [89] ist wohl bekannt, dass für quadratische Systeme mit  $m = p$  genau dann immer eine eindeutige Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  der klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  und somit des Problems ORP 4.1 existiert, falls die Nicht-Resonanz-Bedingung aus Annahme 4.3 erfüllt wird.

Unter diesen Voraussetzung erhält man für  $m = p$  auch direkt die eindeutige optimale Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des Problems OORP 4.1 für beliebiges  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ , was im Folgenden erörtert wird. Da die Nicht-Resonanz-Bedingung erfüllt ist, wird wegen  $m = p$  auch die Bedingung (4.51) impliziert, sodass kein unbeobachtbarer Eigenwert des Systems mit Eigenwerten des Exosystems übereinstimmt. Nach Korollar 4.1, S. 170, und Satz 4.2, S. 165, existiert daher immer eine eindeutige optimale Lösung des Problems OORP 4.1. Das zugehörige Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$  löst wegen der zweiten und dritten Gleichung der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  notwendigerweise ebenfalls die Gleichungen  $(\mathcal{RG})$ . Daher müssen  $(\mathbf{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$  und  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  übereinstimmen. Dies ist zudem daran ersichtlich, dass unter den getroffenen Annahmen die notwendige Bedingung (4.41) für eine zulässige Variation nur von  $(\delta \mathbf{\Pi}_x, \delta \mathbf{F}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  erfüllt wird.

Letzteres impliziert zusammen mit dem Beweis zum Satz 4.4, S. 174, dass durch  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  ebenfalls die eindeutige Lösung des Problems OORP 4.2 zur Minimierung des Mittelwertes der Fehlerenergie gegeben ist. Dies folgt auch daraus, dass die Nicht-Resonanz-Bedingungen aus den Annahmen 4.3 und 4.4 für  $m = p$  äquivalent sind. Dann gilt, dass aus jeder Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  der Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  die Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{0}, \mathbf{F})$  der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  konstruiert werden kann. Aufgrund von

Satz 4.4 ist jede Lösung des klassischen Problems ORP 4.1 unter den hier betrachteten Voraussetzungen auch eine optimale Lösung des Problems OORP 4.2.

Auf Basis dieser Zusammenhänge kann die aus den Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  gewonnene Lösung  $(\Pi_x \bar{x}(\cdot), F\bar{x}(\cdot))$  auch mittels Satz 4.5 als Grenzwert der Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 4.1$  bestimmt werden. Unter der Nicht-Resonanz-Bedingung aus Annahme 4.3 bzw. 4.4 ist das klassische Output Regulation Problem ORP 4.1 für  $m = p$  somit nichts anderes als ein Sonderfall des linear-quadratischen optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 4.1$ .

### 4.5.2 Durchgriff und zusätzliche Zustandsgewichtung

Um eine übersichtliche Präsentation der Ergebnisse zu gewährleisten, wurde bisher ein Durchgriff der Stellgröße auf den Ausgang:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}} \quad (4.98)$$

vernachlässigt. Es sei nun  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ . Außerdem soll eine zusätzliche Zustandsgewichtung, wie sie in [108, 148] in Betracht gezogen wird, im Problem OORP 4.1 auch berücksichtigt werden. Hierzu erweitert man das Kostenfunktional zu

$$J_T^u(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}_s^\top \mathbf{Q}_x \mathbf{x}_s + \mathbf{u}_s^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_s) dt \quad (4.99)$$

mit  $\mathbf{Q}_x \succeq \mathbf{0}$ . Wegen der Zustandsbeschränkung  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{0}$  in (4.13) hat diese Gewichtung keinen Einfluss auf den Ausgangsverlauf  $\mathbf{y}(t)$ . Stattdessen wird es damit möglich, Zustandsverläufe, die nicht direkt auf den Ausgang  $\mathbf{y}$  wirken, gezielt durch die Wahl von  $\mathbf{Q}_x$  zu beeinflussen. Nach [6, Kap. 4] wählt man daher sinnvollerweise

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{C}^\perp \mathbf{Q}^\perp \mathbf{C}^{\perp\top} \quad (4.100)$$

mit  $\mathbf{C}\mathbf{C}^\perp = \mathbf{0}$  und beliebigem  $\mathbf{Q}^\perp \succeq \mathbf{0}$ . Eine Lösung des Problems (4.47) erhält man für  $\mathbf{Q}_x \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ , indem statt der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  die neuen Gleichungen

$$\Pi_\phi^u \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{Q}_x \Pi_x^u - \mathbf{A}^\top \Pi_\phi^u + \mathbf{C}^\top \mathbf{F}_\phi^u, \quad (4.101a)$$

$$\Pi_x^u \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x^u + \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u + \mathbf{D}^\top \mathbf{F}_\phi^u) + \mathbf{E}_d, \quad (4.101b)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \Pi_x^u + \mathbf{D} \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u + \mathbf{D}^\top \mathbf{F}_\phi^u) + \mathbf{D}_d \quad (4.101c)$$

verwendet werden. Diese können mithilfe der gleichen Methodik wie in Abschnitt 4.4.2 hergeleitet werden, wobei zu beachten ist, dass aufgrund der Zustandsbeschränkung  $\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$  die Variationen durch  $\mathbf{C}\delta\mathbf{x}_s + \mathbf{D}\delta\mathbf{u}_s \equiv \mathbf{0}$  eingeschränkt sind. Um das Lemma 4.1, S. 161, anwenden zu können, genügt es daher

$$\left( \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_s} \right|_* + \dot{\phi} \right)^\top \delta \mathbf{x}_s + \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s, \phi_s, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{u}_s} \right|_*^\top \delta \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_\phi^\top \mathbf{C} \delta \mathbf{x}_s + \mathbf{u}_\phi^\top \mathbf{D} \delta \mathbf{u}_s = \mathbf{0} \quad (4.102)$$

statt der Bedingungen (4.42) und (4.27b) aus Abschnitt 4.4.2 bzw. 4.4.1 zu erfüllen. Wählt man  $\mathbf{u}_\phi = \mathbf{F}_\phi^u \bar{\mathbf{x}}$ , so führt (4.102) in Verbindung mit der Zustandsbeschränkung zu den neuen Regulatorgleichungen (4.101).

Für  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ , werden die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  ebenfalls einfach durch die neuen Gleichungen

$$\Pi_x^y \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x^y + \mathbf{B} \mathbf{F}^y + \mathbf{E}_d, \quad (4.103a)$$

$$\Pi_\phi^y \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^\top \Pi_\phi^y - \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} (\mathbf{C} \Pi_x^y + \mathbf{D} \mathbf{F}^y + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}), \quad (4.103b)$$

$$\mathbf{0} = -\mathbf{B}^\top \Pi_\phi^y - \mathbf{D}^\top \mathbf{Q} (\mathbf{C} \Pi_x^y + \mathbf{D} \mathbf{F}^y + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}) \quad (4.103c)$$

ersetzt, um eine Lösung des Problems OORP 4.2 zu bestimmen. Diese können mittels des Vorgehens aus den Abschnitten 4.4.1 und 4.4.3 hergeleitet werden. Die explizite Erweiterung um eine zusätzliche Zustandsgeewichtung mittels  $\mathbf{Q}_x$  ist nicht nötig, da diese einfach durch die Einführung zusätzlicher Ausgänge mit entsprechender ergänzter Gewichtung in  $\mathbf{Q}$  berücksichtigt werden kann.

Bezüglich dieser modifizierten neuen Regulatorgleichungen (4.101) bzw. (4.103) und der resultierenden Paare  $(\Pi_x^u, \mathbf{F}^u)$  bzw.  $(\Pi_x^y, \mathbf{F}^y)$  sind alle Ergebnisse zur Lösbarkeit (für jedes beliebige  $\mathbf{Q}_x \succeq \mathbf{0}$ ) und Optimalität in Abschnitt 4.4 weiterhin gültig. Hierbei müssen allerdings bei den Nicht-Resonanz-Bedingungen die Matrizen in (4.61) und (4.65) entsprechend der Rosenbrockschen Systemmatrix  $\mathcal{R}(s)$  in (B.8), S. 223, um den Durchgriff erweitert werden. Insbesondere bleibt das wichtige Resultat aus Satz 4.1 bestehen, d. h., es existiert genau dann eine Lösung der Gleichungen (4.101), wenn die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  eine Lösung besitzen, die auch um den Durchgriff  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$  zu erweitern sind:

$$\Pi_x \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x + \mathbf{B} \mathbf{F} + \mathbf{E}_d, \quad (4.104a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \Pi_x + \mathbf{D} \mathbf{F} + \mathbf{D}_d. \quad (4.104b)$$

Es ist möglich, die getroffenen Aussagen zu verifizieren, indem  $\mathbf{Q}_x$  und  $\mathbf{D}$  in den Beweisen in Abschnitt 4.4 adäquat mitberücksichtigt werden.

### 4.5.3 Allgemeinere zulässige Lösungen

An dieser Stellen werden die Probleme OORP 4.1 und OORP 4.2 unter Einbeziehung der allgemeinen zulässigen Lösungen  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$  nach Definition 2.2, S. 15, die sich nicht mehr nur auf Lösungen der Form  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  beschränken, betrachtet. Der Anfangswert  $\mathbf{x}(0)$  darf hier jedoch beliebig gewählt werden, anstatt ihn durch  $\mathbf{x}_0$  vorzugeben. Weiterhin seien die Annahmen 4.1 und 4.2 erfüllt. Statt eines minimalen quadratischen Mittelwertes wird sinnvollerweise ein optimales stationäres Verhalten zu den Kosten  $J_T^u(\cdot)$  bzw.  $J_T^y(\cdot)$  angestrebt. Wie aus dem Beispiel 2.1 in Abschnitt 2.2.1, S. 22, bekannt ist, erlaubt das eine feinere Unterscheidung zwischen verschiedenen zulässigen Lösungen.

Es wird zunächst das Problem OFP<sub>∞</sub> 4.1 unter der Annahme 4.5 betrachtet. Für eine Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ , die mittels der Gleichungen (4.32) ermittelt wurde, gilt für die Kostendifferenz

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) - J_T(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) = \infty \quad (4.105)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , für die

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 > 0 \quad (4.106)$$

zutrifft. Dieses Ergebnis ist eine Konsequenz von Korollar 3.1, S. 82, zum optimalen stationären Verhalten.<sup>23)</sup> Auf Basis von Satz 4.5 sind vergleichbare Ergebnisse für die Kandidaten zu den Problemen OORP 4.1 und OORP 4.2 aus Abschnitt 4.4 zu erwarten.

Mit Blick auf das Problem OORP 4.1 sei das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$  eine Lösung der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$ . Wenn zusätzlich Annahme 4.5 erfüllt wird, dann gilt für die Kostendifferenz

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T^u(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) - J_T^u(\mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) = \infty \quad (4.107)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die die Zustandsbeschränkung (4.13) und die Bedingung

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{\Pi}_x^u \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 > 0 \quad (4.108)$$

<sup>23)</sup> Das Korollar 3.1 kann nach Bemerkung 3.6, S. 83, auch angewendet werden, wenn eine Annahme wie 4.5 zur Entdeckbarkeit erfüllt wird.

erfüllt. Auf Basis der Variationsrechnung aus Abschnitt 4.4.1 kann dies analog zum Korollar 3.1 bewiesen werden, wobei die relevanten Fälle 2 und 3 im Beweis von Satz 3.2, S. 77 bzw. 79, zur überholend optimalen Folgeregelung auf ähnliche Weise gehandhabt werden können.

Mit Bezug zum Problem OORP 4.2 sei das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^y, \mathbf{F}^y)$  eine Lösung der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$ . Für die Kostendifferenz folgt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T^y(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) - J_T^y(\mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) = \infty \quad (4.109)$$

für jede zulässige Lösung  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ , die die Bedingung

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}(t))\|_2 > 0 \quad (4.110)$$

erfüllt und für die  $\|\mathbf{x}(t)\|_2$  und  $\|\mathbf{u}(t)\|_2$  auf dem Intervall  $t \in [0, \infty)$  beschränkt sind. Letzteres impliziert, dass

$$\|\delta \dot{\mathbf{x}}(t)\|_2 = \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \quad (4.111)$$

eine obere Schranke auf  $[0, \infty)$  besitzt. Auf Basis der Variationsrechnung aus Abschnitt 4.4.1 lässt sich die Kostendifferenz durch

$$\Delta J_T^y(\cdot) = \delta^1 J_T^y(\cdot) + \frac{1}{2} \delta^2 J_T^y(\cdot) \quad (4.112)$$

angeben. Die erste Variation  $\delta^1 J_T^y(\cdot)$  entspricht (4.28) und ist unter den gegebenen Annahmen beschränkt für jedes  $T > 0$ . Die zweite Variation

$$\delta^2 J_T^y(\cdot) = \int_0^T \delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} dt \quad (4.113)$$

wächst monoton mit  $T$ . Daher muss sie einen Grenzwert besitzen, falls sie beschränkt ist. Ob dieser Grenzwert existiert, kann mit *Barbats Lemma* A.2, S. 217, überprüft werden, da dieses aufgrund der Beschränkung von  $\|\delta \dot{\mathbf{x}}(t)\|_2$  in (4.111) anwendbar ist. Hieraus resultiert jedoch, dass kein Grenzwert existieren kann, da die notwendige Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta \mathbf{x} = 0$  hierfür durch (4.110) verletzt wird. Die zweite Variation  $\delta^2 J_T^y(\cdot)$  ist unbeschränkt, was das Ergebnis (4.109) impliziert.

Auch unter Einbeziehung der allgemeineren Definition 2.2 für zulässige Lösungen können für die Kandidaten aus Abschnitt 4.4 letztendlich starke Optimalitätseigenschaften wie im Korollar 3.1 im Kapitel 3 nachgewiesen werden. Dies unterstreicht, dass die typische Reglerstruktur (4.3) in der Output Regulation Theorie keine Einschränkung darstellt, sondern vielmehr notwendig ist, um diese Optimalitätseigenschaften zu erzielen.



#### 4.5.4 Unbeschränkte Soll- oder Störgrößen

Liegen nichtkonstante Polynome oder exponentiell anwachsende Signale als Störungen oder Solltrajektorien vor, so ist die Annahme 4.2 nicht erfüllt. Ohne diese Annahme sind die Ergebnisse aus Abschnitt 4.4 hinfällig. Es wurde bereits in Abschnitt 3.4.6 anhand des Gegenbeispiels 3.1, S. 92, gezeigt, dass dann im Allgemeinen keine überholend optimale Lösung des optimalen Folgeregelungsproblems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  existieren wird. Dieses Gegenbeispiel führt zum selben Schluss für das optimale Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_\infty 4.1$  zur QMW Optimalität. Da die beiden Probleme OORP 4.1 zur Minimierung des Mittelwertes der Stellenergie und OORP 4.2 zur Minimierung des Mittelwertes der Fehlerenergie als Sonderfälle des Problems  $\text{OFP}_\infty 4.1$  aufzufassen sind, ist auch für diese im Allgemeinen die Existenz einer optimalen Lösung nicht zu erwarten.

Es stellt sich die Frage, ob die Kandidaten aus den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 nichtsdestotrotz wünschenswerte Eigenschaften aufweisen. In Abschnitt 3.5 wurde in dieser Hinsicht das Konzept des Agreeable Plan aus der Definition 2.7, S. 26, herangezogen. Eine Übertragung dieses Konzepts auf die beiden Probleme OORP 4.1 und OORP 4.2 erscheint vielversprechend. Dies wird nun kurz diskutiert, jedoch ohne formale Herleitung.

Hierzu betrachtet man den Kandidaten  $(\mathbf{\Pi}_x(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}})$  zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$ , der nach Satz 3.1 das stationäre Verhalten des Agreeable Plan in Abschnitt 3.5.3 darstellt, falls dieser existiert. Mit Blick auf das Problem OORP 4.1 konvergiere das Paar  $(\mathbf{\Pi}_x(\rho, \mu), \mathbf{F}(\rho, \mu))$  für  $\mu = 1$  und  $\rho \rightarrow \infty$  gegen ein mittels der Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  bestimmtes Paar  $(\mathbf{\Pi}_x^u, \mathbf{F}^u)$ . Weiterhin sei  $(\mathbf{\Pi}_x(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}})$  für  $\mu = 1$  und beliebig große  $\rho > 0$  ein Agreeable Plan zu den Kosten  $J_T(\cdot)$  in (4.17) und dem Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Pi}_x(\rho, \mu)\bar{\mathbf{x}}_0$ . D. h., die Eigenwertbedingungen aus Satz 3.7 seien für  $\mu = 1$  und alle  $\rho \gg 0$  erfüllt. Mit Blick auf die Kosten  $J_T^u(\cdot)$  in (4.12) ist dann zu erwarten, dass die Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^u\bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u\bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  für den Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Pi}_x^u\bar{\mathbf{x}}_0$  vergleichbare Eigenschaften zu denen eines Agreeable Plan aus der Definition 2.7 aufweist. Selbiges ist für eine Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^y\bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y\bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  aus Abschnitt 4.4.3 zu erwarten, wenn die gleichen Voraussetzungen für  $\rho = 1$  und  $\mu \rightarrow 0$  erfüllt werden.

Wie in Abschnitt 3.5.3 erscheint es auch hier bei unzutreffender Annahme 4.2 im Sinne eines Agreeable Plan vielversprechend, die Kandidaten aus den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 zu implementieren, für die die genannten Voraussetzungen einhalten werden.

### 4.5.5 Verbindung zur Lösung eines statischen Optimierungsproblems

In Abschnitt 3.6 wurde bereits gezeigt, dass es möglich ist, ein optimales stationäres Verhalten zum Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  mittels des statischen Optimierungsproblems 3.1, S.116, zu bestimmen. Dies gelingt auch für die Probleme OORP 4.1 und 4.2, wie folgt:

#### Überaktuierte Systeme

In Abschnitt 3.6 wurde ein Optimierungsproblem aus [108] entnommen und an das Problem  $\text{OFP}_\infty 3.1$  in Kapitel 3 angepasst. Das ursprüngliche Optimierungsproblem aus [108] hat zum Ziel, das Paar  $(\Pi_x^u, \mathbf{F}^u)$  zur Lösung des Problems OORP 4.1 zu bestimmen. Obwohl das Optimierungsproblem oftmals angewendet wird [69, 70, 148], ist es bisher jedoch nicht bewiesen, dass dieses Ziel auch erreicht wird. Dies wird nun anhand des Satzes 3.8 aus Abschnitt 3.6, S.120, verifiziert. Man betrachtet ein

**Statisches Optimierungsproblem 4.1** ([108]).

$$\underset{\Pi_x, \mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2} \cdot \operatorname{spur} \left( \mathbf{F}^\top \mathbf{R} \mathbf{F} \right) \quad (4.114)$$

$$\text{u.d.Nb.:} \quad \Pi_x \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi_x + \mathbf{B} \mathbf{F} + \mathbf{E}_d, \quad (4.115)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \Pi_x + \mathbf{D}_d. \quad (4.116)$$

Die Nebenbedingungen sind die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$ , die hier bekanntlich notwendig und hinreichend sind, um die Zustandsbeschränkung (4.13) für eine zulässige Lösung nach Definition 4.1 zu garantieren. Es folgt das Resultat

**Korollar 4.3.** *Die Annahmen 4.1 und 4.2 seien erfüllt. Die Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  des Exosystems (4.2) liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form (3.150) vor und die Bedingung (4.51) aus Satz 4.2 treffe zu. Weiterhin existiere wenigstens ein Paar  $(\Pi_x, \mathbf{F})$ , das die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  in (4.5) löst. Die eindeutige optimale Lösung  $(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des Problems OORP 4.1, die mittels der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  nach Satz 4.2 bestimmt ist, ist äquivalent durch die Lösung des statischen Optimierungsproblem 4.1 bestimmt.*

*Beweis.* Die optimale Lösung  $(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des Problems OORP 4.1 minimiert den quadratischen Mittelwert (4.11) unter allen Lösungen

$(\Pi_x \bar{x}(\cdot), F \bar{x}(\cdot))$  des Problems ORP 4.1, wobei  $(\Pi_x^u, F^u)$  und  $(\Pi_x, F)$  die Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  erfüllen müssen. Nach Satz 4.2 ist die optimale Lösung  $(\Pi_x^u \bar{x}(\cdot), F^u \bar{x}(\cdot))$  eindeutig. Mithilfe von Lemma 3.3, S. 118, kann daher völlig analog zum Beweis von Satz 3.8, S. 120, aus der eindeutigen Minimierung des quadratischen Mittelwertes (4.11) auf die eindeutige Minimierung von  $\text{spur} \left( F^\top R F \right)$  geschlossen werden. D. h., das Paar  $(\Pi_x^u, F^u)$  ist die eindeutige Lösung des statischen Optimierungsproblems 4.1.  $\square$

Alternativ kann der Beweis auch analog zur Bemerkung 3.12, S. 122, erfolgen. Daher gilt das Korollar 4.3 auch, wenn  $\bar{A}$  lediglich schiefssymmetrisch ist. Eine solche Zustandsraumdarstellung des Koordinatensystems existiert immer unter der Annahme 4.2.

Mithilfe von Abschnitt 4.5.2 ist es auch hier möglich, eine zusätzliche Zustandsbeschränkung mit  $Q_x \succeq 0$  in den Kosten (4.99) und einen Durchgriff wie in der Ausgangsgleichung (4.98) zu berücksichtigen. Hierzu wird im statischen Optimierungsproblem 4.1 wie in [108] die Gütefunktion

$$\text{spur} \left( \Pi_x^\top Q_x \Pi_x + F^\top R F \right) \quad (4.117)$$

und die Nebenbedingung (4.104b) statt (4.116) herangezogen. Das Ergebnis des Korollars 4.3 bleibt dann für die neuen Regulatorgleichungen (4.101) erhalten, wobei die Bedingung (4.51) durch eine schwächere ersetzt werden kann. Diese schwächere Bedingung erhält man, indem man die Spalten der Matrix in (4.51) um  $Q_x$  erweitert.

## Unteraktuierte Systeme

Auf Basis des statischen Optimierungsproblems 3.1 und des Satzes 3.8 aus Abschnitt 3.6 ist es auch möglich, ein statisches Optimierungsproblem zur Bestimmung der Lösung von OORP 4.2 abzuleiten. Dieses lautet:

### Statisches Optimierungsproblem 4.2.

$$\underset{\Pi_x, F}{\text{argmin}} \quad \frac{1}{2} \cdot \text{spur} \left( (C \Pi_x + D_d - \bar{C})^\top Q (C \Pi_x + D_d - \bar{C}) \right) \quad (4.118)$$

$$\text{u.d.Nb.:} \quad \Pi_x \bar{A} = A \Pi_x + B F + E_d, \quad (4.119)$$

Völlig analog zu Satz 3.8 bzw. der Bemerkung 3.12, S. 122, erhält man

**Korollar 4.4.** *Die Annahmen 4.1 und 4.2 sowie die Nicht-Resonanz-Bedingung 4.4 seien erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die*

Systemmatrix  $\overline{\mathbf{A}}$  des Exosystems (4.2) schiefsymmetrisch. Das Problem OORP 4.2 hat die eindeutige optimale Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x^y \overline{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \overline{\mathbf{x}}(\cdot))$ , die mittels der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  nach Satz 4.4 oder äquivalent durch die Lösung des statischen Optimierungsproblem 4.2 bestimmt ist.

Das Korollar hat auch für einen Durchgriff Bestand. Hierzu wird das Gütemaß im statischen Optimierungsproblem 4.2 der Ausgangsgleichung (4.98) entsprechend um  $\mathbf{D}\mathbf{F}$  erweitert und die neuen Regulatorgleichungen (4.103) werden einbezogen. Wie in Abschnitt 4.5.2 erläutert, wird auch die Nicht-Resonanz-Bedingung 4.4 angepasst.

## 4.6 Simulationsbeispiele

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels werden an dem überaktuierten Helikopter und dem unteraktuierten Drei-Massen-Schwinger aus Abschnitt 3.7 demonstriert. Hierzu wird je ein Beispiel, für das die Annahme 4.2 erfüllt ist, betrachtet.

### 4.6.1 Überaktuiertes System: Helikopter

Der Helikopter *Lynx ZD559* aus [132, S. 279] wird ausführlich in Abschnitt 3.7.1 beschrieben. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  des linearisierten Zustandsraummodells der Ordnung  $n = 9$  mit  $m = 4$  Stellgrößen sind in Anhang G.1.1 angegeben. Der Helikopter soll einen slalomähnlichen Flug, wie in der Abbildung 3.6 auf S. 125 gezeigt, durchführen. Hierzu werden für die  $p = 3$  Ausgänge

$$\mathbf{y} = [x_1 \quad x_5 \quad x_9]^\top = [v_x \quad v_y \quad \psi]^\top \quad (4.120)$$

sinusoidale Solltrajektorien

$$\overline{\mathbf{y}}(t) = \left[ 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \frac{25^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \sin \left( 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \right) \right]^\top \quad (4.121)$$

vorgegeben. Die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  kann (3.171) entnommen werden. Außerdem wirkt auf die Beschleunigung  $\dot{x}_1 = a_x$  eine Störung

$$d(t) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos \left( 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t \right). \quad (4.122)$$

Ein Exosystem (4.2) mit den Matrizen  $\overline{\mathbf{A}}$  und  $\overline{\mathbf{C}}$  aus (3.174) erzeugt für den Anfangswert  $\overline{\mathbf{x}}_0$  gemäß (3.180) den Zustandsverlauf  $\overline{\mathbf{x}}(t)$  zu dieser

Solltrajektorie und der Störung. Für dieses Exosystem ist die Annahme 4.2 erfüllt. Die Störmatrizen  $\mathbf{E}_d$  und  $\mathbf{D}_d$  sind in (3.175) gegeben.

Das System ist infolge der gültigen Bedingung

$$\text{rang}(\mathbf{B}) = 4 > 3 = \text{rang}(\mathbf{C}) \quad (4.123)$$

überaktuiert. Daher ist es das Ziel, durch die effizienteste Regelung bezogen auf die gemittelte Stellenergie zu erreichen, dass der Systemausgang  $\mathbf{y}_s(t)$  der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  exakt folgt, d. h., der Folgefehler konvergiert wie in (4.4) gegen null. Hierzu wird das zeitinvariante Regelgesetz

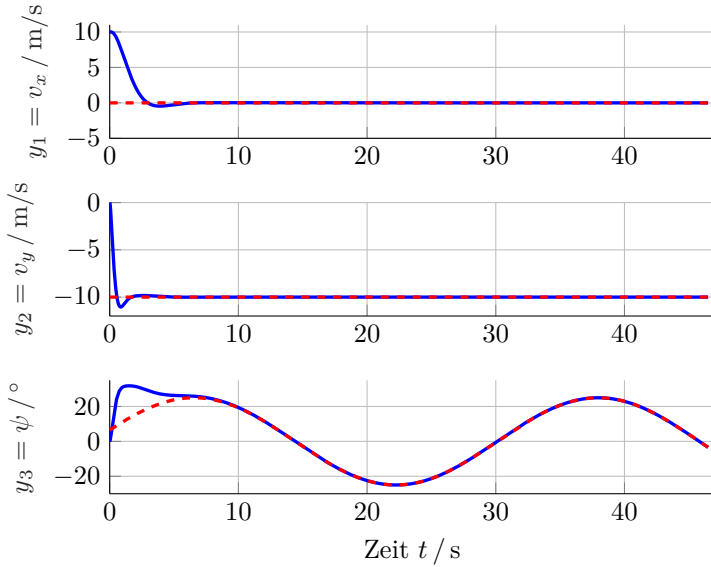
$$\mathbf{u}^u(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}^u(t) - \Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.124)$$

angesetzt und das Paar  $(\Pi_x^u, \mathbf{F}^u)$  durch die Lösung des Problems OORP 4.1 bestimmt. Hierdurch wird der quadratische Mittelwert  $QMW^u(\cdot)$  in (4.11) mit der Stellenergie  $J_T^u(\cdot)$  in (4.12) minimiert, wobei die Gewichtung der Stellgrößen wie in Abschnitt 3.7.1 zu  $\mathbf{R} = 10 \frac{180^2}{\pi^2} \cdot \mathbf{I}_4$  gewählt wird.

Der überaktuierte Helikopter  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist vollständig steuerbar und weist, wie nach [53, Theorem 5] zu erwarten ist, keine invarianten Nullstellen auf. Somit sind sowohl die Annahme 4.1 als auch die Nicht-Resonanz-Bedingung (4.61) aus Annahme 4.3 erfüllt. Da das System vollständig beobachtbar ist, trifft auch die Bedingung (4.51) zu. Auf Basis von Satz 4.2 und Korollar 4.1 existiert daher für beliebige gegebene Matrizen  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\mathbf{E}_d$  und  $\mathbf{D}_d$  genau ein Paar  $(\Pi_x^u, \mathbf{F}^u)$ , das auf die eindeutige Lösung des Problems OORP 4.1 für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  führt. Dieses Paar wird nach Satz 4.2, S. 165, mittels der eindeutigen Lösung der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  in (4.47) berechnet. Das Ergebnis ist in Anhang G.1.3 angegeben. Nach Korollar 4.3, S. 191, löst dieses Paar auch das statische Optimierungsproblem 4.1 aus [108]. Dessen Minimum beträgt 5,837. Die Rückführmatrix  $\mathbf{K}$  wird mittels des Entwurfs eines linear-quadratischen Reglers bestimmt und der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil.

Für den Anfangswert  $\mathbf{x}^u(0) = \mathbf{x}_0$  in (3.181) mit  $x_1(0) = v_x(0) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und allen anderen Elemente gleich null wird eine Simulation durchgeführt. Die Abbildung 4.2 zeigt den resultierenden Verlauf der Ausgänge  $\mathbf{y}(t)$  für das Regelgesetz  $\mathbf{u}^u(t)$  (—) auf dem Intervall  $[0, 46,5 \text{ s}]$ . Nach der Transition folgen diese offensichtlich, wie gewünscht, exakt den Solltrajektorien  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  (- -) und der Einfluss der Störung  $d(t)$  auf die Ausgänge wird vollständig unterdrückt.

Weiterhin werden analog zum Abschnitt 3.7.1 die optimalen Regelungen  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  zu drei Problemen OFP<sub>T</sub>3.1 für den endlichen Horizont  $[0, 300 \text{ s}]$



**Abbildung 4.2:** Darstellung der Solltrajektorien (---) und der Ausgänge für  $u^u(t)$  (—).

wie in Abschnitt 2.4.1 entworfen. Die optimalen Lösungen minimieren das Gütefunktional  $J_T(\cdot)$  aus (4.17) und damit auch den quadratischen Mittelwert  $QMW_T(\cdot) = \frac{1}{T}J_T(\cdot)$  über den endlichen Horizont  $[0, T]$ . Damit sind sie geeignet, die Güte der Regelung (4.124) über endliche Horizonte durch einen Vergleich zu beurteilen. Hierzu wird die gleiche Gewichtung der Stellgrößen durch  $\mathbf{R} = 10 \frac{180^2}{\pi^2} \cdot \mathbf{I}_4$  und den Parameter  $\mu = 1$  in  $J_T(\cdot)$  erreicht. Der Folgefehler wird durch

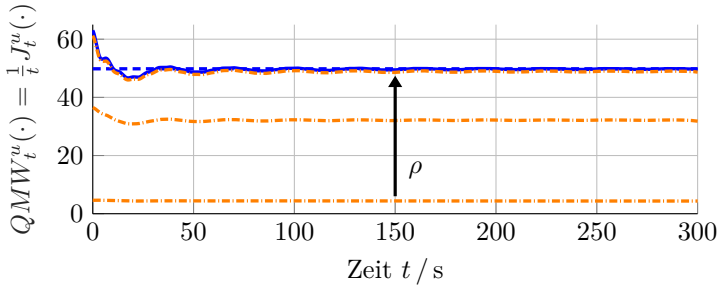
$$\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 4, 15) \quad (4.125)$$

und jeweils einen der drei Parameter

$$\rho \in \{0, 1; 1; 30\} \quad (4.126)$$

gewichtet, wobei die Wahl  $\rho = 30$  zu einem nahezu exakten Folgen der Solltrajektorie führen wird, wie bereits in der Simulation in Abschnitt 3.7.1 beobachtet wurde.

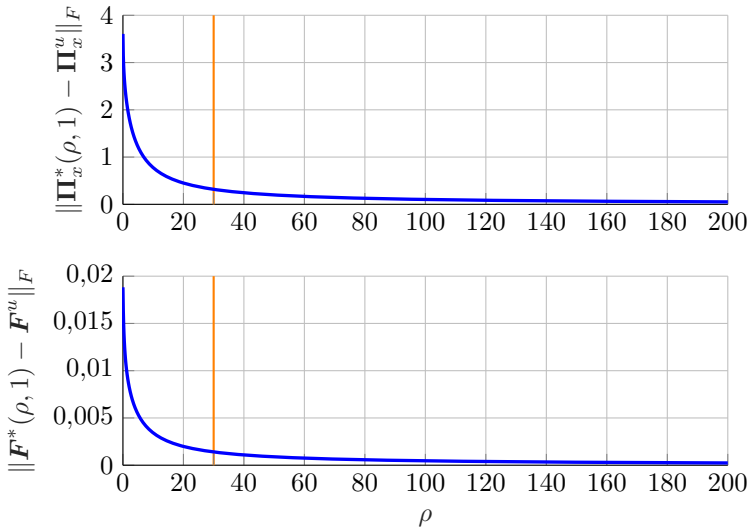
Für das stationäre Verhalten  $(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  ist der Verlauf des quadratischen Mittelwertes  $QMW_t^u(\cdot) = \frac{1}{t}J_t^u(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  (—) in der



**Abbildung 4.3:** Darstellung des Mittelwerts der Stellenergie auf  $(0, t]$  für  $\mathbf{u}_s^*(\cdot)$  (—) sowie für  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  (---) für zunehmendes  $\rho$ .

Abbildung 4.3 für  $t \in [0, 300\text{s}]$  zu sehen. Mit zunehmender Zeit  $t$  konvergiert dieser gegen das Minimum von  $QMW^u(\cdot) = \lim_{t \rightarrow \infty} QMW_t^u(\cdot)$  in (4.11) (---). Das Minimum kann, wie in der Bemerkung 4.3 auf S. 170 erläutert, mithilfe von Lemma 3.3 bestimmt werden und beträgt  $QMW^u(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) = 49,8212$ . Zum Vergleich zeigt die Abbildung die resultierenden Mittelwerte  $QMW_t^u(\cdot)$  der Stellenergie für die optimalen Regelungen  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  (---).<sup>24)</sup> Im Abschnitt 3.7.1 wurde beobachtet, dass durch ein höheres  $\rho$  die Gewichtung des Folgefehlers zunimmt und dadurch die investierte Stellenergie ansteigt. Aus gleichem Grund nimmt auch hier deren quadratischer Mittelwert zu. Für  $\rho = 30$  weist  $QMW_t^u(\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  nach  $t = 300\text{s}$  nur  $+0,9629$  bezüglich  $QMW_t^u(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  auf, was relativ  $+1,98\%$  entspricht. Dieser geringe Unterschied ist bemerkenswert, weil die Regelung  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  sogar Stellenergie einsparen kann, da der Ausgang  $\mathbf{y}$  der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}$  im Problem OFP<sub>T</sub>3.1 asymptotisch nicht exakt folgen muss. Für eine weitere Erhöhung von  $\rho$  würde der Unterschied der quadratischen Mittelwerte weiter abnehmen. Daraus lässt sich für dieses Beispiel schließen, dass die Regelung  $\mathbf{u}^u(t)$  in (4.124) auch über den betrachteten endlichen Horizont nahezu die bestmögliche Nutzung der überschüssigen Stellgrößen bezogen auf  $QMW_t^u(\cdot)$  unter der Einschränkung einer möglichst genauen Folgeregelung erreicht.

<sup>24)</sup> Zur besseren Vergleichbarkeit wurde hierzu der Anfangswert  $\mathbf{x}_T^*(0) = \Pi_x^*(\rho, 1)\bar{\mathbf{x}}_0$  gewählt. Dies vermeidet eine Transition zu Beginn des Intervalls, da die optimalen Lösungen direkt auf ihrer Turnpike  $\Pi_x^*(\rho, 1)\bar{\mathbf{x}}(t)$  starten, vergleiche hierzu Satz 3.5. Die Vernachlässigung der Transition in beiden Fälle ist dadurch zu begründen, dass sie für  $t \rightarrow \infty$  ohnehin keinen Einfluss auf den quadratischen Mittelwert hätte.



**Abbildung 4.4:** Abweichungen der beiden stationären Verhalten zu den Problemen OORP 4.1 und  $\text{OFP}_\infty$  4.1 mit Markierung von  $\rho = 30$  (—).

Abschließend illustriert die Abbildung 4.4 das Ergebnis aus Satz 4.5 a), S.182. Hierzu werden nach Korollar 4.2, S.180, die Paare  $(\Pi_x^*(\rho, 1), F^*(\rho, 1))$  zur Lösung der Probleme  $\text{OFP}_\infty$  4.1 für  $R = 10 \frac{180^2}{\pi^2} \cdot I_4$  sowie  $Q$  in (4.125) und 355 verschiedene Parameter  $\rho \in [0, 001, 200]$  berechnet. Die Abbildung zeigt die Konvergenz dieser Paare gegen  $(\Pi_x^u, F^u)$  für steigendes  $\rho$  gemäß (4.91). Die Frobeniusnorm der Abweichung nimmt hyperbolisch mit  $\rho$  ab, was aus (4.90) und der Definition A.4 des Landauschen Symbols  $\mathcal{O}$  im Anhang A.1 hervorgeht. Für die drei Parameter  $\rho \in \{0, 1; 30\}$  ist das stationäre Ausgangsverhalten aus der Abbildung 3.7, S.128, abzulesen. Wie im Abschnitt 3.7.1 analysiert wurde, führt  $\rho = 30$  mit dem im Anhang G.1.2 angegebenen Paar  $(\Pi_x^*(30, 1), F^*(30, 1))$  nahezu auf eine exakte Folgeregulation, wohingegen für  $\rho = 0, 1$  und  $\rho = 1$  starke Abweichungen von der Solltrajektorie auftreten. Diese Beobachtung lässt sich aus der Abbildung 4.4 ablesen, die zeigt, dass für das markierte  $\rho = 30$  (—) die Abweichungen bereits stark abgenommen haben. Dahingegen ist dies für  $\rho \leq 1$  nicht der Fall.



### 4.6.2 Unteraktuiertes System: Drei-Massen-Schwinger

Die  $p = 3$  Positionen der drei Massen

$$\mathbf{y} = [x_1 \quad x_3 \quad x_5]^\top \quad (4.127)$$

des gedämpften Drei-Massen-Schwingers aus der Abbildung 3.13 im Abschnitt 3.7.2, S. 137, sollen den Solltrajektorien

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + \frac{18^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \right) + 1 \right) \text{ cm} \\ 0 \\ \left( \pi \sin \left( \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t \right) + 0,5 \right) \text{ cm} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

folgen. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  des Zustandsraummodells der Ordnung  $n = 6$  sind im Anhang G.2.1 angegeben und die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  geht aus (3.188) hervor. Es wirken keine Störungen auf den Drei-Massen-Schwinger, woraus  $\mathbf{E}_d = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$  folgen. Durch den ausgefallenen Aktor stehen nur  $m = 2$  Stellgrößen zur Verfügung und der Drei-Massen-Schwinger ist unteraktuiert, da

$$\text{rang}(\mathbf{B}) = 2 < 3 = \text{rang}(\mathbf{C}) \quad (4.129)$$

gilt. Im vorliegenden Fall ist es daher unmöglich, der Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  exakt zu folgen, die durch ein Exosystem mit den Matrizen  $\bar{\mathbf{A}}$  und  $\bar{\mathbf{C}}$  in (3.193) und dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  in (3.194) generiert wird. Stattdessen ist es das Ziel, mithilfe einer Regelung den quadratischen Mittelwert  $QMW^y(\cdot)$  in (4.14) mit der Folgefehlerenergie  $J_T^y(\cdot)$  aus (4.15) zu minimieren, wobei der Folgefehler  $\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)$  durch

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(32, 60, 4) \quad (4.130)$$

gewichtet wird. Daher wird eine zeitinvariante Regelung

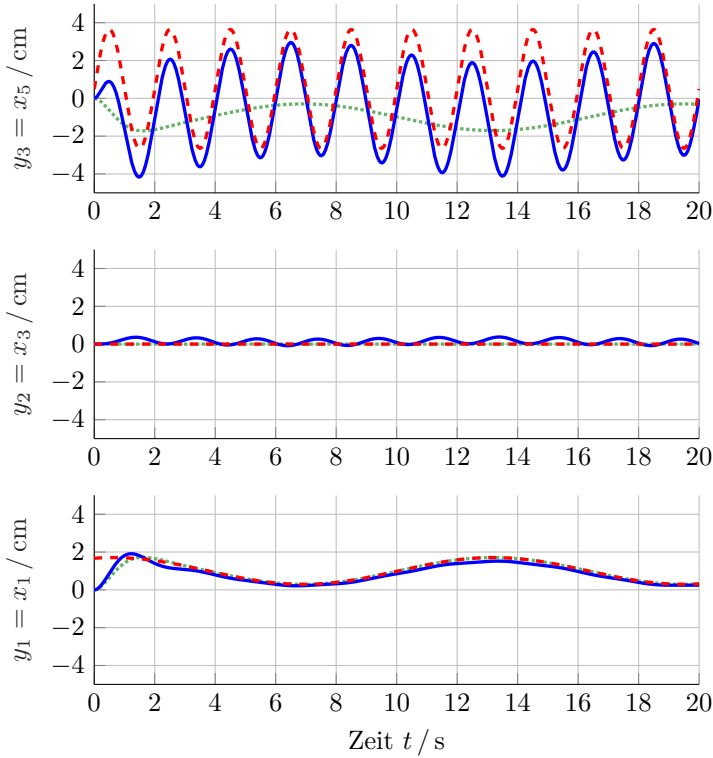
$$\mathbf{u}^y(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}^y(t) - \Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.131)$$

auf Basis einer Lösung  $(\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  des Problems OORP 4.2 entworfen. Da der Drei-Massen-Schwinger vollständig steuerbar ist und die Solltrajektorien beschränkt sind, sind die Annahmen 4.1 und 4.2 erfüllt. Außerdem weist das System  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$  keine invarianten Nullstellen auf, wie bereits nach [53, Theorem 5] zu erwarten war. Daraus folgt, dass die Nicht-Resonanz-Bedingung (4.65) der Annahme 4.4, S. 173, zutrifft.

Für beliebige Matrizen  $\mathbf{E}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$  und  $\bar{\mathbf{C}}$  haben die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  in (4.64) nach Satz 4.3 eine eindeutige Lösung. Im vorliegenden Fall geht daraus das im Anhang G.2.3 angegebene Paar  $(\Pi_x^y, \mathbf{F}^y)$  hervor. Durch dieses Paar ist nach Satz 4.4, S. 174, die eindeutige optimale Lösung (4.68) des Problems OORP 4.2 bestimmt. Das Paar ist nach Korollar 4.4 auch die optimale Lösung des statischen Optimierungsproblems 4.2, S. 192. Dessen Minimum beträgt 4,5413. Für den Entwurf von  $\mathbf{u}^y(t)$  verbleibt es lediglich eine stabilisierende Rückführmatrix  $\mathbf{K}$  zu berechnen, was hier durch den Entwurf eines linear-quadratischen Reglers aus Abschnitt 2.6 erfolgt.

An diesem Punkt stellt sich die Frage, ob der Entwurf mittels des im Abschnitt 4.4.3 eingeführten neuen Verfahrens überhaupt erforderlich ist. Schließlich hat der Folgefehler der Position  $y_3 = x_5$  der rechten Masse  $m_3$  eine wesentlich niedrigere Relevanz infolge der niedrigen Gewichtung  $Q_{33} = 4$  in (4.130). Zum Vergleich wird daher eine Regelung  $\mathbf{u}^{\text{OR}}(t)$  gleicher Struktur wie  $\mathbf{u}^y(t)$  implementiert, die jedoch stattdessen das Problem ORP 4.1 löst, sodass die beiden Position  $y_1 = x_1$  und  $y_2 = x_3$  nach der Transition exakt ihren Solltrajektorien  $\bar{y}_1$  und  $\bar{y}_2$  folgen. Hierzu verwendet  $\mathbf{u}^{\text{OR}}(t)$  das im Anhang G.2.3 angegebene Paar  $(\Pi_x^{\text{OR}}, \mathbf{F}^{\text{OR}})$ , das mittels der klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  in (4.5) berechnet wird, wofür die jeweils letzte Zeile von  $\mathbf{C}$  und  $\bar{\mathbf{C}}$  weggelassen werden.

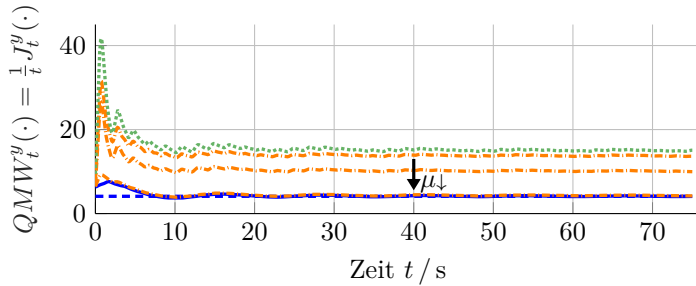
Beginnend in der Ruhelage  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  zeigt die Abbildung 4.5 die Solltrajektorie  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  (---) und die drei Positionen  $\mathbf{y}(t)$  für die beiden Regelungen  $\mathbf{u}^y(t)$  (—) und  $\mathbf{u}^{\text{OR}}(t)$  (---). Der physikalischen Anordnung in Abbildung 3.13 entsprechend werden die Graphen zu den Positionen  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  und  $y_3(t)$  von unten nach oben angeordnet. Da die Massen  $m_1$  bis  $m_3$  von links nach rechts in der Abbildung 3.13 angeordnet sind und positive Ausschläge der Positionen  $y_1$  bis  $y_3$  nach rechts erfolgen, werden  $y_1$  bis  $y_3$  von unten nach oben aufgetragen. Trotz der gewünschten hohen Amplituden  $\bar{y}_1(t)$  und  $\bar{y}_3(t)$ , gelingt es der Regelung  $\mathbf{u}^y(t)$  (—), die Ausschläge  $y_2(t)$  der Masse  $m_2$  in der Mitte verhältnismäßig klein zu halten. Durch den positiven Mittelwert der Position  $y_1(t)$  der linken Masse ist die mittlere Masse zwar im Mittel nach rechts verschoben, jedoch hält sich dies in Grenzen, da die Position  $y_3(t)$  der rechten Masse dem entgegenwirkt. Hierzu weicht die rechte Masse  $m_3$  nach links von ihrer Solltrajektorie  $\bar{y}_3(t)$  ab. Nach der Transition ist diese Abweichung dann besonders groß, wenn die Position  $y_1(t)$  ihr Maximum bei  $t \approx 13,2\text{s}$  erreicht. Im Vergleich nimmt der Folgefehler der beiden Position  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  für  $\mathbf{u}^{\text{OR}}(t)$  (---) asymptotisch ab. Jedoch weicht dadurch die Position  $y_3(t)$  stark von ihrem Sollwert  $\bar{y}_3(t)$  ab und ihr Verlauf weist keine Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



**Abbildung 4.5:** Darstellung der Solltrajektorie  $\bar{y}(t)$  (---) und der Ausgänge  $y(t)$  (von unten nach oben) für  $u^y(t)$  (—) sowie für  $u^{\text{OR}}(t)$  (····).

der Solltrajektorie  $\bar{y}_3(t)$  auf. Der Grund hierfür ist, dass die letzten beiden Zustände des Exosystems durch Nullspalten in  $\Pi_x^{\text{OR}}$  und  $F^{\text{OR}}$  gewichtet werden, wie aus Anhang G.2.3 abzulesen ist. Dies ist nachvollziehbar, da dieser Teil der Dynamik des Exosystems durch das Streichen der letzten Zeile von  $\bar{C}$  keine Rolle mehr in dem Problem ORP 4.1 spielt.

Auf Basis der vorangegangenen Beobachtungen ist es verständlich, dass die Lösung  $(\Pi_x^y \bar{x}(\cdot), F^y \bar{x}(\cdot))$  (—) gegenüber  $(\Pi_x^{\text{OR}} \bar{x}(\cdot), F^{\text{OR}} \bar{x}(\cdot))$  (····) einen wesentlich kleineren Mittelwert  $QMW_t^y(\cdot)$  der Fehlerenergie  $J_t^y(\cdot)$  aus (4.15) über das Intervall  $[0, t]$  hat. Dies zeigt die Abbildung 4.6 für  $t \in [0, 75 \text{ s}]$ . Mit zunehmender Zeit  $t$  konvergiert der quadratische Mittelwert gegen das Minimum  $QMW^y(\Pi_x^y \bar{x}(\cdot), F^y \bar{x}(\cdot)) = 4,1132$  (--) von



**Abbildung 4.6:** Darstellung des Mittelwerts der Folgefehlerenergie über die Intervalle  $[0, t]$  für  $\mathbf{u}_s^*(\cdot)$  (—), für  $\mathbf{u}^{\text{OR}}(\cdot)$  (---) sowie für  $\mathbf{u}_T^*(\cdot)$  (---) für ein abnehmendes  $\mu$ .

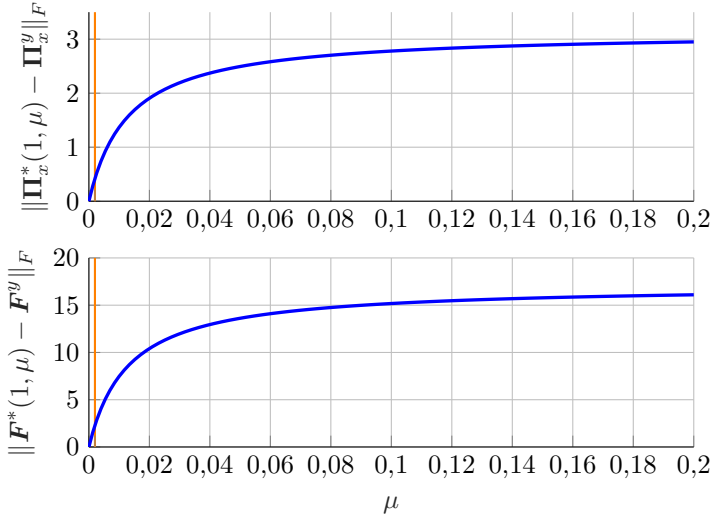
$QMW^y(\cdot) = \lim_{t \rightarrow \infty} QMW_t^y(\cdot)$  in (4.69). Das Minimum wurde der Bemerkung 4.8 folgend mittels Lemma 3.3 bestimmt.

Für einen weiteren Vergleich sind die quadratischen Mittelwerte  $QMW_t^y(\cdot)$  von den optimalen Lösungen  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  (---) zu drei Problemen OFP<sub>T</sub>3.1 über einen endlichen Horizont mit  $T = 75$  s eingezeichnet.<sup>25)</sup> Diese Lösungen minimieren das Gütefunktional  $J_T(\cdot)$  aus (4.17) und damit auch den quadratischen Mittelwert  $\frac{1}{T}J_T(\cdot)$  für die Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  aus (4.130),  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_2$ , den Parameter  $\rho = 1$  und für jeweils einen der drei Parameter

$$\mu \in \{0,002; 0,05; 1\}. \quad (4.132)$$

Der quadratische Mittelwert  $QMW_t^y(\cdot)$  nimmt mit abnehmenden Parameter  $\mu$  infolge der geringeren Gewichtung der Stellenergie ab. Für  $\mu = 0,002$  und  $t = 75$  s ist  $QMW_t^y(\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  noch immer um  $-0,1198$  kleiner gegenüber  $QMW_t^y(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$ , was relativ  $-2,85\%$  entspricht. Schon für  $\mu = 1$  ist der quadratische Mittelwert für  $(\mathbf{x}_T^*(\cdot), \mathbf{u}_T^*(\cdot))$  kleiner als der für die Lösung  $(\Pi_x^{\text{OR}} \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^{\text{OR}} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$ . Für das betrachtete Beispiel und die einbezogenen Lösungen lässt sich festhalten, dass  $(\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  im Mittel das beste Verhalten bezüglich des Folgefehlers unter der Priorisierung (4.130) erzielt.

<sup>25)</sup>Wie im Abschnitt 4.6.1 startet auch hier die optimale Lösung zur besseren Vergleichbarkeit auf ihrer Turnpike  $\mathbf{x}_T^*(0) = \Pi_x^*(1, \mu) \bar{\mathbf{x}}(0)$ , siehe hierzu Satz 3.5. Die Transition wird bei der Analyse des quadratischen Mittelwerts vernachlässigt, da sie für  $t \rightarrow \infty$  ohne irrelevant wäre.



**Abbildung 4.7:** Abweichungen der beiden stationären Verhalten der Lösungen der Probleme OORP 4.2 und OFP<sub>∞</sub>4.1 mit Markierung von  $\mu = 0,002$  (—).

Vergleicht man die beiden Verläufe der Ausgänge  $\mathbf{y}(t)$  (—) für  $\mathbf{u}^y(t)$  in der Abbildung 4.5 und für  $\mathbf{u}^*(t)$  mit  $\mu = 0,002$  in der Abbildung 3.14 aus Abschnitt 3.7.2, so fällt auf, dass sich diese sehr ähneln. Dies wird durch das Ergebnis aus Satz 4.5 b) begründet. Hierzu werden mittels der Entwurfsgleichungen aus Satz 3.1 bzw. (4.32) die Paare  $(\Pi_x^*(1, \mu), F^*(1, \mu))$  für 2100 verschiedene  $\mu \in [10^{-10}, 0,2]$  und  $\mathbf{Q}$  aus (4.130) sowie  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_2$  berechnet. Nach Korollar 4.2 führt jedes dieser Paare auf die optimale Lösung (4.85) des Problems OFP<sub>T</sub>4.1 für das gegebene  $\mu$ . Die Abbildung 4.7 zeigt die Frobeniusnorm der Abweichung der Paare von  $(\Pi_x^y, F^y)$ . Wie zu sehen ist, strebt diese Abweichung gemäß (4.93) mit abnehmenden  $\mu$  gegen null. Weiterhin ist zu erkennen, dass es möglich ist, oberhalb beider Kurven (—) eine Gerade endlicher Steigung im Ursprung anzulegen, wie es durch (4.92) und die Definition A.4 des Landauschen Symbols  $\mathcal{O}$ , S. 216, impliziert wird. Für das markierte  $\mu = 0,002$  (—) haben beide Abweichungen bereits stark abgenommen, was die Beobachtung der ähnlichen Ausgangsverläufe erklärt.

## 4.7 Fazit mit Übersicht der Hauptresultate

Die Ergebnisse dieses Kapitels haben die Output Regulation Theorie auf sinnvolle Weise für überaktuierte aber sogar auch für unteraktuierte Systeme erweitert. Hervorzuheben ist dabei die Einführung der beiden neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$ , S. 164, und  $(\mathcal{RG}^y)$ , S. 172. Die neuen Regulatorgleichungen und die Hauptresultate dieses Kapitels werden am Ende des Abschnittes in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Für überaktuierte Systeme war in der Output Regulation Theorie bisher die Frage unbeantwortet, wie eine exakte lineare Folgeregelung gefunden werden kann, die die zusätzlichen Aktoren am effizientesten nutzt. Mithilfe der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  in (4.47), S. 164, kann diejenige Lösung bestimmt werden, die zu einem Minimum des Mittelwertes der Stellenergie führt. Hierdurch wird das bisher ungelöste Problem auf dem einfachst denkbaren Weg, nämlich durch die Lösung linearer algebraischer Gleichungen, gelöst. Es wurde dabei belegt, dass die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  immer eine Lösung besitzen, falls eine exakte lineare Folgeregelung existiert und daher die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  in (4.5), S. 147, lösbar sind. Daher können die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer durch die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  ersetzt werden. Hierdurch stellt man immer sicher, dass die so bestimmte Lösung die effizienteste Nutzung der Aktoren bezogen auf eine festgelegte Gewichtung  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  garantiert. Bis auf Sonderfälle existiert diese Lösung immer für beliebige Exosysteme, die beschränkte Soll- und Störgrößen generieren, da die bekannte Nicht-Resonanz-Bedingung aus der Output Regulation Theorie für fast alle überaktuierten Systeme erfüllt ist.

Für unteraktuierte Systeme existiert hingegen im Allgemeinen keine exakte Folgeregelung, weshalb diese in der Output Regulation Theorie meist nicht berücksichtigt werden können. Für diesen Fall stellen die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  in (4.64), S. 172, eine neue nützliche Erweiterung dar. Deren Lösung führt zur Minimierung des Mittelwertes der Energie des Folgefehlers. Durch die Lösung dieser linearen algebraischen Gleichungen wird folglich die Regelung bestimmt, für die der Systemausgang bestmöglich der Solltrajektorie folgt. Der Entwurf ist dabei genauso einfach durchzuführen wie die Bestimmung der Lösung des klassischen Output Regulation Problems, wenn es diese gäbe. Bis auf Sonderfälle existiert auch hier die gesuchte Lösung immer für beliebige Exosysteme, da die Nicht-Resonanz-Bedingung für fast alle unteraktuierten Systeme erfüllt ist.

Eine weitere wichtige Einsicht besteht darin, dass die gefundene Lösung für über- bzw. unteraktuierte Systeme der Lösung eines Sonderfalls eines linear-quadratischen optimalen Folgeregelungsproblems wie  $\text{OFP}_{\infty 3.1}$  entspricht. Diese Sonderfälle wurden durch die Ergebnisse von Kapitel 3 noch nicht erfasst. Aus diesem Zusammenhang lies sich für die meisten quadratischen Systeme ableiten, dass das herkömmliche Output Regulation Problem 4.1 ebenfalls ein Sonderfall eines optimalen Folgeregelungsproblems darstellt, was die Output Regulation Theorie in einen neuen Zusammenhang zur Theorie optimaler Folgeregelungen stellt.

Zuletzt sei betont, dass auch die Ergebnisse dieses Kapitels zur Lösung weiterführender Problemstellungen von Interesse sind. So wurde aufgezeigt, dass das in [108] vorgeschlagene statische Optimierungsproblem 4.1 tatsächlich zu einer optimalen Lösung eines optimalen Output Regulation Problems führt, was bisher nicht bewiesen wurde. Hierfür muss das Exosystem allerdings in einer speziellen Zustandsraumdarstellung vorliegen und die generierten Solltrajektorien und Störungen müssen beschränkt sein. Diese Erkenntnis ist wichtig für die Verfahren [69, 70] zur Bestimmung exakter Folgeregelungen für Systeme mit unbekannter Dynamik. Im letzten Schritt wird dort das statische Optimierungsproblem 4.1 gelöst, um vorhandene Freiheitsgrade effektiv zu nutzen. Dabei werden bisher jedoch die beiden genannten Anforderung vernachlässigt, die, wie hier gezeigt, zwingend notwendig sind. Würden in [69, 70] die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  durch die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  ersetzt, so könnte die Optimierung im letzten Schritt und die Anforderung an die Zustandsraumdarstellung des Exosystem gänzlich entfallen. Darüber hinaus ließen sich dadurch auch die Kernteile der Verfahren [69, 70] vereinfachen.

**Tabelle 4.1:** Übersicht der Hauptresultate zur optimalen Output Regulation aus den Abschnitten 4.4.2 bis 4.4.4 sowie Vergleich zur klassischen Output Regulation aus [63, 155], siehe Abschnitt 4.1. Zur Berücksichtigung eines Durchgriffes oder zusätzlicher Zustandsgewichtungen siehe Abschnitt 4.5.

---

Lineares zeitinvariantes, stabilisierbares System mit Störgrößen	Zeitinv. Exosystem generiert <i>beschränkte</i> Soll- und Störgrößen
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d\bar{\mathbf{x}}$	$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$
$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_d\bar{\mathbf{x}}$	$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}$

---

---

Regelgesetz mit beliebiger stabilisierender Rückführmatrix  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}$$

auf Basis eines zu bestimmenden stationären Verhaltens

$$(\mathbf{x}_s(\cdot), \mathbf{u}_s(\cdot)) = (\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$$

mit dem stationären Ausgang  $\mathbf{y}_s(\cdot) = \mathbf{C} \mathbf{x}_s(\cdot) + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ .

---

Klassische Output Regulation:

Bestimmung von  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  mittels der klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{B} \mathbf{F} + \mathbf{E}_d, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{D}_d \end{aligned}$$

Eigenschaften:

1. Lösbarkeit der Gl.  $(\mathcal{RG})$  ist notwendig und hinreichend zur Output Regulation:  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0}$ .
  2. Im Allgemeinen haben die Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  für überaktuierte Systeme unendlich viele Lösungen und für unteraktuierte Systeme keine Lösung.
- 

Optimale Output Regulation (für überaktuierte Systeme):

Bestimmung von  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{F})$  mittels  $\mathbf{F} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi^u$  und der Lösung  $(\mathbf{\Pi}_x, \mathbf{\Pi}_\phi^u, \mathbf{F}_\phi^u)$  der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_\phi^u \bar{\mathbf{A}} &= -\mathbf{A}^\top \mathbf{\Pi}_\phi^u + \mathbf{C}^\top \mathbf{F}_\phi^u, \\ \mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_x - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi^u + \mathbf{E}_d, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{D}_d. \end{aligned}$$

Eigenschaften (für alle beliebigen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ ):

1. Garantiert Output Regulation:  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)) = \mathbf{0}$ .
2. Minimiert Mittelwert der Stellenergie gewichtet mit  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$ :  

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \mathbf{u}_s(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_s(t) dt.$$



3. Gl.  $(\mathcal{RG}^u)$  sind genau dann lösbar, wenn Gl.  $(\mathcal{RG})$  lösbar sind, daher notwendig und hinreichend zur optimalen Output Regulation.
4. Die neuen Regulatorgl.  $(\mathcal{RG}^u)$  haben eine Lösung für fast alle überaktuierten Systeme und beliebige Exosysteme.
5. Grenzfall der überholend optimalen Folgeregulation aus Kapitel 3 zu den Gewichtungen  $\rho \mathbf{Q}$  mit beliebigem  $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R}$  für  $\rho \rightarrow \infty$ .

Optimale Output Regulation (für unteraktuierte Systeme):

Bestimmung von  $(\Pi_x, \mathbf{F})$  mittels der Lösung  $(\Pi_x, \Pi_\phi^y, \mathbf{F})$  der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$

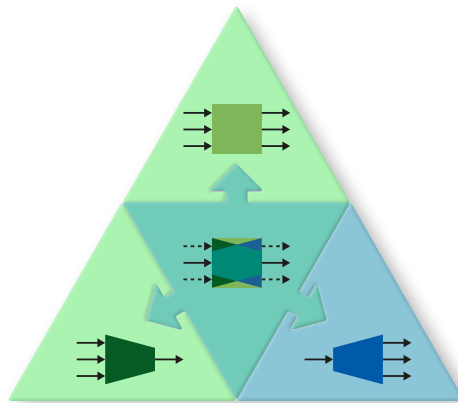
$$\begin{aligned}\Pi_x \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \Pi_x^y + \mathbf{B} \mathbf{F} + \mathbf{E}_d, \\ \Pi_\phi^y \bar{\mathbf{A}} &= -\mathbf{A}^\top \Pi_\phi^y - \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} (\mathbf{C} \Pi_x + \mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}}), \\ \mathbf{0} &= -\mathbf{B}^\top \Pi_\phi^y\end{aligned}$$

Eigenschaften (für alle beliebigen Anfangswerte  $\mathbf{x}_0$  und  $\bar{\mathbf{x}}_0$ ):

1. Minimiert Mittelwert der Fehlerenergie gewichtet mit  $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$ :  
 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t))^\top \mathbf{Q} (\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)) dt.$
2. Neue Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  haben eine Lösung für fast alle unteraktuierten Systeme und beliebige Exosysteme.
3. Grenzfall der überholend optimalen Folgeregulation aus Kapitel 3 zu den Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  und  $\mu \mathbf{R}$  mit beliebigem  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  für  $\mu \rightarrow 0$ .

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit wurde durch die Frage motiviert, ob es möglich ist, einfach zu implementierende Folgeregeln für quadratische, über- und unteraktuierte lineare Systeme durch ein einheitliches Verfahren zu entwerfen. Dabei sollten die zusätzlichen Freiheitsgrade von überaktuierten Systemen zur Reduzierung der erforderlichen Stellenergie genutzt werden. Unteraktuierte Systeme sollten der Solltrajektorie durch die Regelung so genau wie möglich folgen, da ein exaktes Folgen in diesem Fall normalerweise unmöglich ist.



**Abbildung 5.1:** Linear-quadratische optimale Folgeregung über unendliche Horizonte (Mitte) mit einheitlicher Entwurfstheorie für quadratische, über- und unteraktuierte Systeme (oben, links und rechts).

Die Ergebnisse des ersten Teils dieser Arbeit zeigen, dass ein linear-quadratisches optimales Folgeregungsproblem über unendliche Horizonte und dessen hergeleitete Lösung das gesuchte Verfahren bilden, mit dem

alle genannten Ziele erreicht werden. Hierfür wurden beliebige Solltrajektorien und Störungen betrachtet, die durch ein Exosystem generiert werden können. Ein Entwurf auf solche Weise resultiert in einer zeitinvarianten Regelung mit einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, die genauso einfach zu implementieren ist wie herkömmliche Folgeregelungen für quadratische Systeme. In diesem Sinne ist das eingeführte Verfahren der verbindende Theoriebaustein in Abbildung 1.2, wie es Abbildung 5.1 illustriert. Die Ergebnisse wurden in Tabelle 3.1, S. 142, zusammengefasst. Darauf aufbauend wurde im zweiten Teil der Arbeit das Entwurfsverfahren für exakte Folgeregelungen aus der Output Regulation Theorie für über- und unteraktuierte Systeme erweitert. Dadurch können die anfangs genannten Ziele erreicht werden, obwohl das neue Entwurfsverfahren und die Implementierung des Reglers genauso einfach durchzuführen sind wie in der klassischen Output Regulation Theorie. Die Tabelle 4.1, S. 206, gibt eine Übersicht dieser Ergebnisse.

Im Kapitel 3 wurde die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  des *optimalen Folgeregelungsproblems über unendliche Horizonte* vorgestellt. Die zeitinvariante Regelung kann mithilfe algebraischer Entwurfsgleichungen, die auf Basis von notwendigen Optimalitätsbedingungen bestimmt wurden, einfach berechnet werden. Diese umfassen eine algebraische Riccatigleichung und eine neue lineare Sylvestergleichung. Die *überholende Optimalität*, die das stärkste bekannte Optimalitätskriterium über unendliche Horizonte ist, wurde per Variationsrechnung unter schwachen Annahmen nachgewiesen. Mithilfe dieser konnte auch gezeigt werden, dass die Lösung  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  für  $t \rightarrow \infty$  zu einem optimalen stationären Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  konvergiert, das vom Zustand  $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  des Exosystems abhängt. Die Matrix  $\Pi_x$  zur Parametrisierung des stationären Zustandes und die Vorfiltermatrix  $\mathbf{F}^*$  der überholend optimalen Regelung werden durch die Sylvestergleichung bestimmt. Vorteilhafterweise können durch diese Parametrisierung auch die üblicherweise unterschiedlichen Anforderungen an die Transition und das stationäre Verhalten mittels getrennter Gütemaße berücksichtigt werden. Bei den geführten Beweisen war die Annahme 3.3, dass nur beschränkte Sollgrößen und Störungen vorliegen, essentiell. Ist diese nicht erfüllt und sind die diskutierten Sonderfälle ausgeschlossen, so belegte ein Gegenbeispiel, dass im Allgemeinen keine optimale Lösung existiert.

Dennoch ist die Implementierung des zeitinvarianten Regelgesetzes  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  vorteilhaft, wenn sie zur Approximation der Lösung  $(\mathbf{x}_T^*(t), \mathbf{u}_T^*(t))$  des optimalen Folgeregelungsproblems über einen endlichen Horizont  $[0, T]$  führt. In dieser Hinsicht wurde unter der Annahme 3.3 gezeigt, dass der stati-

onäre Zustandsverlauf  $\Pi_x^* \bar{x}(\cdot)$  eine *Turnpike* des Problems über endliche Horizonte ist. Auf einem langen Horizont verläuft daher der optimale Zustand  $x_T^*(\cdot)$  die meiste Zeit nahe bei der Turnpike  $\Pi_x^* \bar{x}(\cdot)$ . Die Besonderheit des vorgestellten Resultats ist, dass die Turnpike explizit durch  $\Pi_x^* \bar{x}(\cdot)$  parametrisiert wurde. Ein Gegenbeispiel zeigte jedoch, dass ohne die Annahme 3.3 im Allgemeinen keine Turnpike existiert. Liegen unbeschränkte Soll- oder Störgrößen vor, dann ist von einer sinnvollen Folgeregung zu fordern, dass zumindest die größte Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises kleiner als die kleinste Zeitkonstante des Exosystems ist. Ist diese Anforderung erfüllt, so wurde bewiesen, dass die Lösung  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  ein *Agreeable Plan* ist. Als solcher approximiert  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  die optimale Lösung  $(x_T^*(\cdot), u_T^*(\cdot))$  eines jeden hinreichend langen Horizontes  $[0, T]$  über lange Zeit sehr genau. Dies ist vorteilhaft, da oft die zur Implementierung von  $(x_T^*(\cdot), u_T^*(\cdot))$  erforderliche Kenntnis von  $T$  nicht vorhanden ist. Simulationsbeispiele belegten, dass auf dieser Grundlage auch eine sehr genaue Approximation auf dem gesamten Horizont  $[0, T]$  möglich ist.

Als ein erstes **Fazit** ist festzuhalten, dass das neue Entwurfsverfahren für optimale Folgeregungen über unendliche Horizonte aus Kapitel 3 ohne Einschränkung auf quadratische sowie auf über- und unteraktuierte Systeme anwendbar ist. Durch die Vorgabe der Gewichtungen des quadratischen Gütefunktional kann der Anwender dabei flexibel zwischen den einzelnen Folgefehlern sowie der Stellenergie priorisieren. Außerdem weist die erzielte zeitinvariante Regelung die genannten Eigenschaften für alle Solltrajektorien und Störungen auf, die durch das vorgegebene Exosystem erzeugt werden können. Auch für quadratische Systeme ist diese zeitinvariante Regelung von hohem Wert, da sie aufgrund der gewöhnlichen Zwei-Freiheitsgrade-Struktur eine Alternative zur exakten Folgeregung darstellt, wenn ein exaktes Folgen der Solltrajektorie nicht zwingend erforderlich ist.

Unter der Annahme beschränkter Soll- und Störgrößen wurden im Kapitel 4 zwei neue Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  und  $(\mathcal{RG}^y)$  zur *optimalen Output Regulation* vorgestellt. Die Lösbarkeit der aus der *Output Regulation Theorie* (ORT) bekannten klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  dient als notwendiges und hinreichendes Kriterium zur Bestimmung einer exakten Folgeregung unter herkömmlichen Annahmen. Haben diese zwar eine aber keine eindeutige Lösung, was für überaktuierte Systeme zutrifft, so kann mittels der neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$ , S. 164, auf genauso einfache Weise die exakte Folgeregung bestimmt werden, die im Mittel die geringste Stellenergie benötigt. Darüber hinaus wurde gezeigt, dass die neuen

Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  genau dann lösbar sind, wenn es eine exakte Folgeregung gibt. Es ist somit immer möglich, die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  statt der klassischen zu verwenden. Dazu bedarf es lediglich einer vom Anwender festgelegten Gewichtungsmatrix der Stellgrößen. In der ORT konnten bislang keine Fälle berücksichtigt werden, in denen die klassischen Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  keine Lösung haben und somit keine exakte Folgeregung existiert, was typischerweise für unteraktuierte Systeme zutrifft. Im Sinne einer optimalen Output Regulation erlauben die neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$ , S. 172, ohne jegliche Erhöhung der Komplexität, diejenige Folgeregung zu bestimmen, die das Mittel der Energie der Folgefehler entsprechend einer vorgegebenen Gewichtung minimiert. Angenommen die für die ORT typische *Nicht-Resonanz-Bedingung* sei erfüllt, d. h., die Eigenwerte des Exosystems stimmen mit keiner invarianten Nullstelle des Systems überein. Dann existieren die Lösungen der neuen Regulatorgleichungen für alle Solltrajektorien und Störungen, die durch beliebige Ausgangs- und Störmatrizen mit der Dynamik des Exosystems erzeugt werden können. Da über- und unteraktuierte Systeme nur in Ausnahmefällen überhaupt invariante Nullstellen besitzen, ist das neue vorgestellte Verfahren demnach generell anwendbar.

Es kann als **Fazit** festgestellt werden, dass die Output Regulation Theorie für über- und unteraktuierte Systeme umfangreich erweitert wurde. Dabei bleiben die Komplexität des Entwurfs und die Reglerstruktur unverändert und die optimalen Eigenschaften sind für alle Solltrajektorien und Störungen, die sich durch das vorgegebene Exosystem erzeugen lassen, gültig. Schlussendlich wurde gezeigt, dass diese Ergebnisse aus Sonderfällen des optimalen Folgeregungsproblems über einen unendlichen Horizont aus Kapitel 3 hervorgehen. Damit ist auch das herkömmliche Output Regulation Problem für quadratische Systeme nichts anderes als ein Sonderfall dieses optimalen Folgeregungsproblems.

Weiterhin wurde ein erster Eindruck vermittelt, wie die Ergebnisse dieser Arbeit über ihre praktische Anwendung hinaus von Bedeutung sind. Beispielsweise wurde mithilfe der Resultate aus Kapitel 4 bewiesen, dass durch die Lösung eines von [108] vorgeschlagenen *statischen Optimierungsproblems* tatsächlich eine exakte Folgeregung für überaktuierte Systeme bestimmt wird, die im Mittel ein quadratisches Gütefunktional minimiert. Da das statische Optimierungsproblem wiederholt in aktuellen Verfahren [69, 70, 148] angewendet wird, ist dieser bis dahin nicht erbrachte Nachweis ein wichtiger Beitrag. Die im Rahmen dieser Arbeit angefertigten Veröffentlichungen belegen, dass die erzielten Ergebnisse in vielfältigen Bereichen angewendet werden können. Hierzu zählen die

*optimale statische Entkopplungsregelung* für überaktuierte Systeme [25], die *optimale stationäre Synchronisierung* heterogener Agenten [21] sowie das Verfahren zur Ermittlung *optimaler Folgeregelungen für Systemdynamiken mit unbekannten System- und Eingangsmatrizen*. [28].

Einen weiteren **Ausblick** zur Anwendung der Ergebnisse bietet die folgende Übersicht:

**Zeitdiskrete lineare Systeme:** Es ist zu erwarten, dass auch für zeitdiskrete Systeme vergleichbare Resultate für ein linear-quadratisches optimales Folgeregelungsproblem über einen unendlichen Horizont erzielt werden können. In der Literatur wird bei der Bestimmung expliziter Regelungen das Gütefunktional meist so modifiziert, dass es einen endlichen Wert annimmt [17, 18]. Dies ist hier nicht der Fall. Jedoch könnten wieder notwendige Optimalitätsbedingungen für unendliche Horizonte [12] zur Bestimmung eines Kandidaten dienen, wobei das stationäre Verhalten erneut mit Methoden aus der diskreten Output Regulation Theorie [89] parametrisiert werden könnte. Zum Nachweis von beispielsweise überholender Optimalität [143] könnten dann die Ideen zur Betrachtung der Kostenvariation in den Beweisen der Hauptresultate dieser Arbeit als Ausgangspunkt dienen. Wie für den zeitkontinuierlichen Fall [107] wurde auch für zeitdiskrete lineare Systeme gezeigt, dass unter einer Eigenwertbedingung die Reglermatrizen der optimalen Regelung über einen endlichen Horizont  $[0, T]$  für  $T \rightarrow \infty$  gegen zeitinvariante Matrizen konvergieren [10]. Es ist daher naheliegend, dass für zeitdiskrete Systeme vergleichbare Ergebnisse wie der Nachweis eines Agreeable Plan durch ein analoges Vorgehen wie in dieser Arbeit erzielt werden können. Ebenso sollte es möglich sein, die Verfahren zur diskreten Output Regulation [89] für über- und unteraktuierte Systeme analog zu Kapitel 4 zu erweitern.

**Nichtlineare Systeme:** Die Übertragung der Ideen zur Bestimmung expliziter optimaler Folgeregelungen  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  über unendliche Horizonte für nichtlineare Systeme ist ebenfalls vielversprechend. Ein Ansatz hierzu bietet die Entwicklung der Lösungen optimaler autonomer Regelungsprobleme in einer Taylorreihe [2, 122]. Dem folgend wurde in [115] aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen [76] ein Kandidat für die optimale Folgeregelung über unendliche Horizonte als explizite Funktion  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  bestimmt. Das erste Glied der Taylorreihe stimmt dabei mit der in dieser Arbeit hergeleiteten linear-quadratischen optimalen Folgeregelung überein. Für den Nachweis der überholenden Optimalität der Regelung  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  erscheint es möglich, den hier präsentierten Beweis für lineare Systeme über die Variationsrechnung analog zu verfolgen. Dabei müssten

allerdings Variationen höherer Ordnung als zwei berücksichtigt werden. Gegebenenfalls ist auch die Voraussetzung quadratischer Gütefunktionale erforderlich. Weiterhin wäre die explizite Parametrisierung des optimalen stationären Verhaltens von Interesse. Aufgrund der Nichtlinearität ist allerdings der Ansatz  $(\Pi_x^*(\bar{x}), F^*(\bar{x}))$  zu wählen, der wieder mittels der speziellen Lösung des Hamiltonschen Systems bestimmt werden könnte. Hierzu könnten Methoden aus der nichtlinearen Output Regulation Theorie [89, 96] angewendet werden. Im Gegensatz zu der im linearen Fall hergeleiteten Sylvestergleichung würde dieses Vorgehen auf eine partielle Differenzialgleichung in der Variablen  $\Pi_x^*(\bar{x})$  mit Differentiation nach dem Zustand  $\bar{x}$  führen. Deren Lösung könnte zumindest näherungsweise mit dem Ansatz über eine Taylorreihenentwicklung aus [89, Kap. 4] erfolgen.

**Entwurfsverfahren für lineare Systeme mit unbekannter Dynamik:** Wie in den Verfahren aus [69, 70, 98, 127, 134, 161] wird auch in der Veröffentlichung [28] zur Ermittlung der optimalen Folgeregelung für ein lineares System mit unbekannter Dynamik vorausgesetzt, dass der Zustand  $x(t)$  vollständig und rauschfrei gemessen werden kann. Unter praktischen Gesichtspunkten ist eine rauschfreie Messung nicht zu realisieren. Kann das vorhandene Rauschen allerdings als normalverteiltes weißes Rauschen mit bekannter Varianz modelliert werden, dann ist es möglich, durch eine Kompensation [90] das Auftreten systematischer Abweichungen bei der Durchführung des Verfahrens [28] weitestgehend zu unterbinden. Liegt statt einer vollständigen Zustandsmessung lediglich eine Ausgangsmessung vor und sollen die anfangs aufgezählten Verfahren dennoch angewendet werden, so müssen sie wie in [71, 128] erweitert werden. Unter der Voraussetzung der vollständigen Beobachtbarkeit wird hierbei im Wesentlichen der Zustand zu jedem Zeitpunkt als Funktion von Zeitreihen des messbaren Ausgangs und der Stellgröße ersetzt. Da der Aufbau des Verfahrens aus der Veröffentlichung [28], ebenso wie der Aufbau der anfangs aufgezählten Verfahren, auf [98, 161] zurückgeht, erscheint eine Erweiterung der Ergebnisse aus [28] für Ausgangsmessungen analog zu [71, 128] möglich.

**Weitere Anwendungen:** Die klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  aus der Output Regulation Theorie finden Anwendung in unterschiedlichsten Verfahren wie beispielsweise bei der Synchronisierung von Multi-Agenten-Systemen [165]. In der Regel werden dabei Annahmen vorausgesetzt, um die Lösbarkeit zu garantieren. Bei solchen Verfahren könnten diese Annahmen entfallen, indem statt der klassischen die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  verwendet werden. Haben die klassischen Gleichungen eine Lösung, dann stimmt sie mit derjenigen der neuen Gleichungen

$(\mathcal{RG}^y)$  überein. Haben sie hingegen keine Lösung und existiert deswegen keine exakte Folgeregelung, dann liefert die Lösung der neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  zumindest die Folgeregelung, die die mittlere Energie der Folgefehler zur vorgegebenen Gewichtung minimiert. Ebenso könnten die Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  bei solchen Verfahren generell durch die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  ersetzt werden, um eine optimale Nutzung etwaiger Freiheitsgrade bezogen auf eine minimale mittlere Stellenergie zu garantieren. In beiden Fällen müssten allerdings beschränkte Soll- und Störgrößen vorliegen, um die Optimalität zu gewährleisten.



# A Mathematische Grundlagen

## A.1 Definitionen und Sätze

Die folgende Definition ist relevant für die Definition zulässiger Lösungen in Abschnitt 2.2.1.

**Definition A.1** (Stückweise stetige Funktion, [76]). Die Funktion  $f(x): \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stückweise stetig*, falls für jedes kompakte Teilintervall  $[a, b] \subset \mathcal{X}$  eine endliche Anzahl an Stellen  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  existiert, sodass  $f(x)$  auf den Intervallen  $[a_0, a_1]$  und  $(a_i, a_{i+1}]$  für alle  $i = 1, \dots, k-1$  stetig ist sowie der rechtsseitige Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a_i+0} f(x)$  (siehe [176]) für alle  $i = 1, \dots, k-1$  existiert.

Diese Definition kann auch komponentenweise auf eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{f}(x)$  angewendet werden. Gleiches gilt für die Komponenten einer vektorwertigen Folge  $\mathbf{x}_k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und die nächste Definition, die unter anderem im Rahmen der Definition von Optimalitätskriterien in Abschnitt 2.2.1 sowie der Beweisführung in Kapitel 3 relevant ist.

**Definition A.2** (Limes superior/inferior, [176]). Für die reelle Folge  $x_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  ist der *Limes superior* definiert durch

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \geq k} x_i, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = -\infty$  falls  $\sup_{i \geq k} x_i = -\infty$  für  $k \rightarrow \infty$  und  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$  falls  $\sup_{i \geq k} x_i = +\infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Auf analoge Weise ist der *Limes inferior* definiert durch

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k := \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{i \geq k} x_i. \quad (\text{A.2})$$

Falls der Limes superior bzw. inferior endlich sind, dann konvergiert gegen diese jeweils eine Teilfolge  $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , wobei  $k_1 < k_2 < \dots$  gilt. Der Limes superior ist dann der größte Häufungspunkt und der Limes inferior der kleinste Häufungspunkt der Folge. Stimmen diese überein, dann hat

die Folge einen Grenzwert. Auf eine analoge Weise können auch der Limes superior  $\limsup_{t \rightarrow t_0} x(t)$  und Limes inferior  $\liminf_{t \rightarrow t_0} x(t)$  einer Funktion  $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  definiert werden. Lautet die Funktion beispielsweise  $x(t) = \cos(t)$ , dann erhält man  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \cos(t) = 1$  und  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \cos(t) = -1$ .

Der folgende Satz wird im Beweis zum Satz 2.3 über notwendige Optimalitätsbedingungen für unendliche Horizonte verwendet.

**Satz A.1** (Bolzano-Weierstraß, [4]). *Sei  $\mathbf{x}_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Folge, dann existiert immer eine konvergente Teilfolge  $(\mathbf{x}_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , wobei  $k_1 < k_2 < \dots$  gilt.*

Das angeschlossene Lemma ist essentiell für die Variationsrechnung in Abschnitt 2.3 und ist [13, Abschnitt 5-7] entnommen, wo auch ein Beweis angegeben wird.

**Lemma A.1** (Fundamentales Lemma der Variationsrechnung). *Es sei eine stückweise stetige Funktion  $\mathbf{f}(t): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, für die*

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(t)^\top \mathbf{g}(t) dt = 0 \quad (\text{A.3})$$

*für jede beliebige stückweise stetige Funktion  $\mathbf{g}(t): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  gelte. Dann folgt  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$  für jedes  $t \in [t_0, t_1]$ .*

Für die algebraische Lösung von Sylvestergleichungen ist das *Kronecker-Produkt* nützlich:

**Definition A.3** (Kronecker-Produkt, [30]). Es seien zwei Matrizen  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{o \times p}$  gegeben. Dann ist das Kronecker-Produkt  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mo \times np}$  definiert durch

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Außerdem wird der Operator  $\text{vec}(\cdot)$  zur Vektorisierung definiert, der die Spalten einer Matrix stapelt:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{m2} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.5})$$

Dann können die für diese Arbeit relevanten Rechenregeln für das Kronecker-Produkt aus [30, Kap. 7] angegeben werden. Für reelle Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  passender Dimension und  $k \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = (k\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} \quad (\text{A.6b})$$

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}). \quad (\text{A.6c})$$

Mithilfe der Vektorisierung und der letzten Regel kann eine Sylvestergleichung  $\mathbf{C} = \mathbf{AX} + \mathbf{XB}$  in der Variablen  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  und den Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  in die herkömmliche Form linearer Gleichungssysteme umgestellt werden:

$$\text{vec}(\mathbf{C}) = \text{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XB}) \quad (\text{A.7a})$$

$$\Leftrightarrow \text{vec}(\mathbf{C}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{I}_n)\text{vec}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.7b})$$

$$\Leftrightarrow \text{vec}(\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^\top \oplus \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}), \quad (\text{A.7c})$$

wobei in der letzten Zeile die Kronecker-Summe  $\oplus$  eingeführt wurde.

Es werden noch die Landauschen Symbole  $o$  und  $\mathcal{O}$  definiert. Letzteres wird in Abschnitt 4.4.4 verwendet.

**Definition A.4** (Landausche Symbole, [87]). Es seien eine Menge  $D \subset \mathbb{R}$  und ein  $x_0 \in \overline{D}$  gegeben.<sup>1)</sup> Weiterhin seien zwei Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Es gelte  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , die  $0 < |x - x_0| < r$  für ein  $r > 0$  erfüllen. Man sagt,  $f$  ist von der Ordnung klein  $o$  von  $g$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{A.8})$$

für alle  $x \in \{x \in D \mid |x - x_0| < r\}$  erfüllt ist. Abgekürzt schreibt man

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0. \quad (\text{A.9})$$

Dagegen heißt es,  $f$  ist von der Ordnung groß  $\mathcal{O}$  von  $g$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls  $C, r > 0$  existieren, sodass

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad (\text{A.10})$$

für alle  $x \in \{x \in D \mid |x - x_0| < r\}$  erfüllt ist. Abgekürzt schreibt man

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0. \quad (\text{A.11})$$

---

<sup>1)</sup>Der Abschluss  $\overline{D}$  einer Menge  $D$  ist die Vereinigung des Inneren der Menge und ihres Randes [87].

Im Rahmen der Diskussion in Abschnitt 4.5 ist *Barbalats Lemma* nützlich [103, Kap. 8.3]. Hierzu heißt eine Funktion  $x(t)$  *gleichmäßig stetig* auf dem Intervall  $[0, \infty)$ , falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall t_1, t_2 \in [0, \infty): |t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow |x(t_2) - x(t_1)| < \epsilon \quad (\text{A.12})$$

erfüllt wird [176, Abschn. 4.2.2]. Ist eine Funktion  $x(t)$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$  differenzierbar und ist ihre Ableitung  $\dot{x}(t)$  dort beschränkt, d. h., die Ungleichung  $|\dot{x}(t)| < M$  wird für ein  $M > 0$  und alle  $t \in [0, \infty)$  erfüllt, so ist  $x(t)$  gleichmäßig stetig. Vor diesem Hintergrund formuliert man:

**Lemma A.2** (Barbalats Lemma, [103]). *Es sei  $x(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmäßig stetige Funktion auf dem Intervall  $[0, \infty)$ . Angenommen es existiert ein endlicher Grenzwert von  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x(t) dt$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .*

## A.2 Lösungen statischer Optimierungsprobleme

In der Literatur dienen Ausführungen zu Lösungen *statischer* Optimierungsprobleme oftmals als Einstieg in die Variationsrechnung und damit in die Lösung *dynamischer* Optimierungsprobleme wie der Bestimmung einer optimalen Regelung (siehe bspw. [13, 39, 62, 119]). Dies motiviert auch die folgenden Erläuterungen, die größtenteils auf [13, 31, 39] basieren und die notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen einführen sowie analysieren.

### A.2.1 Unbeschränkte statische Optimierungsprobleme

Zunächst wird das unbeschränkte statische Optimierungsproblem

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} f(z) \quad (\text{A.13})$$

betrachtet. Hier sei  $f(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Gütefunktion und  $z$  die Optimierungsvariable. Existiert eine *globale* optimale Lösung  $z^*$ , so nimmt die Gütefunktion an dieser Stelle ihr globales Minimum an:  $f(z^*) \leq f(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ . Ist die strikte Ungleichung unter der zusätzlichen Bedingung  $z \neq z^*$  immer erfüllt, so ist die Lösung  $z^*$  eindeutig. Dahingegen spricht man von einer *lokalen* optimalen Lösung  $z^*$ , falls die Gütefunktion auf einer zugehörigen offenen und nicht leeren

Teilmenge  $\mathcal{D} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\|_2 < \epsilon, \epsilon > 0\} \subset \mathbb{R}^n$  ein Minimum annimmt:  $f(\mathbf{z}^*) \leq f(\mathbf{z}), \forall \mathbf{z} \in \mathcal{D}$ .

In beiden Fällen erfüllt eine existierende optimale Lösung  $\mathbf{z}^*$  die wohl bekannten *notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung*

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}^*} = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

und *zweiter Ordnung*

$$\left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{\mathbf{z}^*} \succeq \mathbf{0}. \quad (\text{A.15})$$

Die erste besagt, dass der Gradient im Minimum verschwindet und die zweite fordert, dass die Hesse-Matrix der Gütefunktion positiv semidefinit ist. Um das statische Optimierungsproblem zu lösen, können mithilfe dieser Bedingungen auch Kandidaten für optimale Lösungen bestimmt werden. Ist für einen Kandidaten die *hinreichende Optimalitätsbedingung*

$$\left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{\mathbf{z}^*} \succ \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

erfüllt, so liegt ein lokales Minimum vor.

Die Bedeutung dieser Optimalitätsbedingungen kann leicht veranschaulicht werden. Dazu wird eine sogenannte *Variation*  $\delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  eingeführt und eine Abweichung  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^* + \epsilon \delta \mathbf{z}$  von einem lokalen Minimum  $\mathbf{z}^*$  mit variablem Skalar  $\epsilon \in \mathbb{R}$  betrachtet. Nun wird die Gütefunktion an der Stelle  $\mathbf{z}^*$  und somit im Punkt  $\epsilon = 0$  in einer Taylorreihe entwickelt:

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}^*) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\epsilon=0}^\top \epsilon \delta \mathbf{z} + \frac{\epsilon^2}{2} \delta \mathbf{z}^\top \left( \left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{\epsilon=0} \right) \delta \mathbf{z} + o(\epsilon^2). \quad (\text{A.17})$$

Wird  $|\epsilon|$  als hinreichend klein angenommen, dann kann das Restglied vernachlässigt werden, da  $\lim_{|\epsilon| \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon^2)}{\epsilon^2} = 0$ . Unter Verwendung der notwendigen Bedingungen folgt

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) \approx \frac{\epsilon^2}{2} \delta \mathbf{z}^\top \left( \left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{\mathbf{z}^*} \right) \delta \mathbf{z} \geq 0. \quad (\text{A.18})$$

D. h., es gilt  $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) \geq 0$  in jeder hinreichend kleinen Umgebung  $\mathcal{D}$  von  $\mathbf{z}^*$ . Die Bedingung erster Ordnung (A.14) garantiert daher, dass der in  $\epsilon \delta \mathbf{z}$  lineare Term verschwindet und ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegen kann. Dass es sich potentiell um ein Minimum handelt, wird durch

die zweite notwendige Bedingung (A.15) sichergestellt. Mittels der hinreichenden Bedingung (A.16) folgert man schließlich, dass  $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) > 0$ ,  $\forall \mathbf{z} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{z}^*\}$ , und ein eindeutiges lokales Minimum an der Stelle  $\mathbf{z}^*$  ist verifiziert.

### A.2.2 Beschränkte statische Optimierungsprobleme

Im Falle des beschränkten statischen Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{z}) \quad (\text{A.19})$$

$$\text{u.d.Nb.: } \mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

muss eine optimale Lösung  $\mathbf{z}^*$  zusätzlich die Nebenbedingungen  $h_i(\mathbf{z}^*) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, m$  erfüllen, wobei  $\mathbf{h}(\mathbf{z}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zweifach stetig differenzierbar sei. Um die Nebenbedingungen zu berücksichtigen, wird die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren* angewendet. Dazu führt man die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi) := f(\mathbf{z}) + \phi^\top \mathbf{h}(\mathbf{z}) \quad (\text{A.21})$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren  $\phi \in \mathbb{R}^m$  ein.

Es sei  $\mathbf{z}^*$  eine (lokale) optimale Lösung, sodass die Nebenbedingungen  $\mathbf{h}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$  erfüllt sind und die Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}^*}$  vollen Rang  $m$  aufweist. Dann existiert nach [31] ein eindeutiger Multiplikator  $\phi^*$ , sodass die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi)}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}^*, \phi^*} = \mathbf{0} \quad (\text{A.22})$$

und zweiter Ordnung erfüllt sind. Letztere verlangt, dass

$$\delta \mathbf{z}^\top \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi)}{\partial \mathbf{z}^2} \Big|_{\mathbf{z}^*, \phi^*} \right) \delta \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.23})$$

für jedes  $\delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}^*} \delta \mathbf{z} = \mathbf{0}$  gilt. Wie für das unbeschränkte Problem, ist auch hier die zweite Bedingung (A.23) hinreichend, falls die strikte Ungleichung ( $>$  statt  $\geq$ ) immer gewährleistet ist sofern  $\delta \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ . Für eine formale Herleitung sei auf [31, Kap. 3] verwiesen.

Wie zuvor sollen die Optimalitätsbedingungen veranschaulicht werden. Dabei wird allerdings auf eine Trennung von abhängigen und unabhängigen Variablen verzichtet, die üblicherweise durchgeführt wird, wie

z. B. in [13, 31, 39]. Im Gegensatz zum unbeschränkten Fall muss  $\mathbf{z}$  aber auch die Nebenbedingung  $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$  erfüllen. Es wird daher eine Abweichung  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^* + \epsilon \delta \mathbf{z} + o(\epsilon)$  mit der Variation  $\delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , einem beliebigem Skalar  $\epsilon \in \mathbb{R}$  und einem nicht näher spezifizierten Restglied von der Ordnung<sup>2)</sup>  $o(\epsilon)$  betrachtet. Da  $|\epsilon|$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt aus der Taylorentwicklung

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}(\mathbf{z}^* + \epsilon \delta \mathbf{z} + o(\epsilon)) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\epsilon=0}^T \epsilon \delta \mathbf{z} + o(\epsilon) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.24})$$

der Funktion  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  im Punkt  $\epsilon = 0$  in der Nebenbedingung, dass

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\epsilon=0}^T \delta \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{A.25})$$

gelten muss. Als eine Konsequenz der Nebenbedingung (A.20) ist die Variation  $\delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  demnach nicht mehr frei wählbar, sondern unterliegt der Beschränkung (A.25).

Trivialerweise genügt die Differenz der Gütefunktionen

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) = \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi^*) - \mathcal{L}(\mathbf{z}^*, \phi^*). \quad (\text{A.26})$$

Die Entwicklung der Differenz in einer Taylorreihe an der Stelle  $\mathbf{z}^*$  bzw. im Punkt  $\epsilon = 0$  resultiert in<sup>3)</sup>

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi^*)}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\epsilon=0}^T \epsilon \delta \mathbf{z} + \frac{\epsilon^2}{2} \delta \mathbf{z}^T \left( \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi^*)}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{\epsilon=0} \right) \delta \mathbf{z} + o(\epsilon^2). \quad (\text{A.27})$$

Wird  $|\epsilon|$  hinreichend klein gewählt und die notwendigen Bedingungen erster Ordnung (A.22) und zweiter Ordnung (A.23) angewendet, dann gilt

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) \approx \frac{\epsilon^2}{2} \delta \mathbf{z}^T \left( \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{z}, \phi^*)}{\partial \mathbf{z}^2} \right|_{\mathbf{z}^*} \right) \delta \mathbf{z} \geq 0 \quad (\text{A.28})$$

für jedes  $\delta \mathbf{z}$ , das (A.25) erfüllt. Daraus folgt, dass in jeder hinreichend kleinen Umgebung  $\mathcal{D}$  von  $\mathbf{z}^*$ , in der  $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$  gilt,  $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}^*) \geq 0$  sichergestellt ist. Die Schlussfolgerungen zur Bedeutung der beiden notwendigen Bedingungen als auch der hinreichenden können nun völlig analog zum Fall des unbeschränkten Optimierungsproblems erfolgen.

<sup>2)</sup>Siehe Definition A.4 in Anhang A.1.

<sup>3)</sup>Der Übersichtlichkeit halber wurde stillschweigend die notwendige Bedingung erster Ordnung (A.22) angewendet, um den Einfluss des Restglieds von  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^* + \epsilon \delta \mathbf{z} + o(\epsilon)$  auf die Koeffizienten von  $\epsilon^2$  zu eliminieren.

## B Regelungstechnische Grundlagen

### B.1 Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit, Beobachtbarkeit und Entdeckbarkeit

Für die entsprechenden Definitionen der Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sei auf [123, Kap. 3] und [155, Kap. 3] verwiesen.

Gegeben sei das System  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$  mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ein Eigenwert der Systemmatrix  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  heißt steuerbar, falls

$$\text{rang}([\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}]) = n \quad (\text{B.1})$$

erfüllt wird [155]. Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist genau dann *vollständig steuerbar*, wenn alle Eigenwerte  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  steuerbar sind. Dies ist bekannt als Steuerbarkeitskriterium von *Hautus*, siehe [123]. Angenommen nicht jeder Eigenwert ist steuerbar. Gilt die Bedingung (B.1) aber zumindest für alle  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  mit  $\Re\{\lambda\} \geq 0$ , dann heißt das System *stabilisierbar* [155].

Analog heißt ein Eigenwert  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  *beobachtbar*, falls

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}\right) = n \quad (\text{B.2})$$

gilt. Das System ist genau dann *vollständig beobachtbar*, wenn alle Eigenwerte  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  beobachtbar sind. Dies heißt auch Beobachtbarkeitskriterium von *Hautus*, siehe [123]. Sind nicht alle Eigenwerte beobachtbar, aber gilt die Bedingung (B.2) zumindest für alle  $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$  mit  $\Re\{\lambda\} \geq 0$ , dann heißt das System *entdeckbar* [155].

### B.2 Zerlegung nicht vollständig steuerbarer bzw. beobachtbarer Systeme

Es sei ein System  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$  gegeben. Angenommen  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist nicht vollständig steuerbar, d. h., nicht alle Eigenwerte sind steuerbar, aber min-



destens einer ist es. Dann existiert nach [123, Kap. 3.1] und [84, Abschn. 3.8.11] immer eine Zerlegung des Systems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (\text{B.3})$$

sodass  $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1)$  vollständig steuerbar ist.

Angenommen  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  ist nicht vollständig beobachtbar. D. h. wenigstens ein Eigenwert ist beobachtbar, jedoch nicht alle. Es existiert nach [84, Abschn. 3.8.12] immer eine Zerlegung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

sodass  $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A}_{11})$  vollständig beobachtbar ist.

Beide Zerlegungen können durch eine Zustandstransformation gewonnen werden [84, 123]. Für ein System der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  besteht die Transformationsmatrix dabei aus den linear unabhängigen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{M}_S = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (\text{B.6})$$

bzw. den linear unabhängigen Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

und weiteren beliebigen, linear unabhängigen Spalten bzw. Zeilen, sodass die Transformationsmatrix regulär ist.

## B.3 Invariante Nullstellen

Die folgenden Erläuterungen zu invarianten Nullstellen und vieles darüber Hinausgehende können z. B. [53, 137, 144] entnommen werden. Eine kompakte Übersicht bietet auch [162, Kap. 3.3]. Detaillierte Ausführungen zu über- und unteraktuierten Systemen sind in [53] zu finden.

Zunächst sei für ein System  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$  mit der Ordnung  $n, m$  Stellgrößen sowie  $p$  Ausgängen die Rosenbrocksche Systemmatrix  $\mathcal{R}_s(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(n+p) \times (n+m)}$  durch

$$\mathcal{R}_s(s) := \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

definiert. Das System sei nicht degeneriert.<sup>1)</sup> Es heißt  $\lambda_z \in \mathbb{C}$  eine *invariante Nullstelle* des Systems  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$ , falls die folgende Bedingung erfüllt wird:

$$\text{rang}(\mathcal{R}_s(\lambda_z)) < n + \min(m, p). \quad (\text{B.9})$$

Für ein SISO-System, für das  $m = p = 1$  zutrifft, entspricht  $\lambda_z$  einer Nullstelle des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion des Systems  $(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D})$ . Daraus leitet sich der Begriff der Nullstelle ab. Für MIMO-Systeme ist er, wie folgt, zu verstehen: Es seien Vektoren  $\mathbf{z}_x \in \mathbb{C}^n$  und  $\mathbf{z}_u \in \mathbb{C}^m$  gegeben, die

$$\mathcal{R}_s(\lambda_z) \begin{bmatrix} \mathbf{z}_x \\ \mathbf{z}_u \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

erfüllen. Dann bleibt der Ausgang  $\mathbf{y}$  des Systems für den Anfangswert  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{z}_x$  und unter der Anregung  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{z}_u e^{\lambda_z t}$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$  in Ruhe:  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ . Bezogen auf die invariante Nullstelle  $\lambda_z$  heißen die Vektoren  $\mathbf{z}_x$  und  $\mathbf{z}_u$  die Zustands- bzw. Eingangsrichtung und beide bilden gemeinsam die nichttriviale Nullstellenrichtung  $\mathbf{z}^\top = [\mathbf{z}_x^\top \quad \mathbf{z}_u^\top] \neq \mathbf{0}$ .

Die Nullstelle  $\lambda_z$  wird als invariant bezeichnet, da sie beispielsweise durch eine beliebige Zustandsrückführung  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{v}$  mit  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einem neuen Eingang  $\mathbf{v}$  unverändert bleibt. D. h.,  $\lambda_z$  ist auch eine Nullstelle des Systems

$$(\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K}, \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{D}). \quad (\text{B.11})$$

## B.4 Transitionsmatrix und adjungiertes System

Die Ausführungen entstammen [13, Abschnitt 3-20 und 3-25]. Gegeben sei ein zeitvariantes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (\text{B.12})$$

<sup>1)</sup>Ein System heißt *degeneriert*, wenn für  $n+1$  beliebige, unterschiedliche Skalare  $s \in \mathbb{R}$  die Bedingung  $\text{rang}(\mathcal{R}_s(s)) < n + \min(m, p)$  erfüllt wird [144].

mit der stetigen Funktion  $\mathbf{A}(t): \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  auf dem Zeitintervall  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt  $\Phi(t, t_0): \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  die Transitionsmatrix des Systems (B.12), falls

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \quad (\text{B.13})$$

und  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$  für ein gegebenes  $t_0 \in \mathcal{I}$  erfüllt werden. Sie hat die folgenden Eigenschaften:

$$\det(\Phi(t, t_0)) \neq 0 \quad \forall t_0, t \in \mathcal{I}, \quad (\text{B.14a})$$

$$\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathcal{I}, \quad (\text{B.14b})$$

$$\Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0) = \mathbf{I} \quad \forall t_0, t \in \mathcal{I}. \quad (\text{B.14c})$$

Nach der ersten Eigenschaft ist sie invertierbar auf dem gesamten Intervall  $\mathcal{I}$ . Mittels der zweiten Eigenschaft für  $t_2 = t_0$  und  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$  resultiert die dritte Eigenschaft. Die Inverse ist demnach

$$\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t). \quad (\text{B.15})$$

Mit der bekannten Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  zur konstanten Funktion  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$  lassen sich diese Eigenschaften vergegenwärtigen.

Das System

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}(t)^\top \mathbf{z} \quad (\text{B.16})$$

ist das zu (B.12) adjungierte System. Sei  $\Psi(t, t_0)$  die zugehörige Transitionsmatrix, die folglich

$$\dot{\Psi}(t, t_0) = -\mathbf{A}(t)^\top \Psi(t, t_0) \quad (\text{B.17})$$

und  $\Psi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$  erfüllt. Dann gilt der Zusammenhang

$$\Psi(t, t_0) = \Phi(t_0, t)^\top \quad (\text{B.18})$$

bzw.  $\Phi(t, t_0)^\top \Psi(t, t_0) = \mathbf{I}$ . Dies kann bewiesen werden, indem man feststellt, dass  $\Phi(t_0, t_0)^\top \Psi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ , und anschließend zeigt, dass

$$\frac{d}{dt} (\Phi(t, t_0)^\top \Psi(t, t_0)) = \mathbf{0}. \quad (\text{B.19})$$

## B.5 Positiv definite Lösung der Riccatischen Matrixdifferenzialgleichung

Hier wird gezeigt, dass die Lösung  $\mathbf{P}_T(t)$  der Riccatischen Matrixdifferenzialgleichungen unter einer Annahme zur Beobachtbarkeit positiv definit ist. Hierzu wird die Minimierung von

$$J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (\text{B.20})$$

mit  $\mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  unter der Systemdynamik  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  und der

**Annahme B.1.** Für ein  $\mathbf{W}$  gegeben durch  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = \mathbf{Q}$  ist das Paar  $(\mathbf{W}, \mathbf{A})$  vollständig beobachtbar.

betrachtet. Eine solche Annahme wird in der Literatur meist nur in Verbindung mit  $T \rightarrow \infty$  untersucht. Daher wird folgender Satz bewiesen:

**Satz B.1.** *Es sei Annahme B.1 erfüllt. Die eindeutige Lösung  $\mathbf{P}_T(t)$  von*

$$-\dot{\mathbf{P}}_T = \mathbf{P}_T \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_T - \mathbf{P}_T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}_T + \mathbf{Q} \quad (\text{B.21})$$

für  $\mathbf{P}_T(T) = \mathbf{0}$  und ein gegebenes  $T > 0$  ist symmetrisch und erfüllt  $\mathbf{P}_T(t) \succ \mathbf{0}$  für alle  $t \in [0, T)$ .

*Beweis.* Aus der üblichen Literatur, wie [34, Theorem 4.5], geht die Eindeutigkeit und Symmetrie von  $\mathbf{P}_T(t)$  hervor sowie, dass  $\mathbf{P}_T(t)$  positiv semidefinit ist für alle  $t \in [0, T]$ . Nach [6, Abschnitt 2.3] sind für jedes  $t_0 \in [0, T)$  und jedes  $\mathbf{x}(t_0)$  die minimalen Kosten  $J^*(t_0, \mathbf{x}(t_0))$  zum Kostenfunktional  $J_{t_0,T}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$  durch

$$J^*(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t_0)^\top \mathbf{P}_T(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (\text{B.22})$$

gegeben. Angenommen es gibt ein  $t_0 \in [0, T)$ , sodass  $\mathbf{P}_T(t_0)$  lediglich positiv semidefinit ist. Dann gibt es immer ein  $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$ , für das  $J^*(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = 0$  gilt. Die optimalen Kosten können wegen  $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}$  offensichtlich nur dann gleich null sein, wenn die optimale Regelung durch

$\mathbf{u}_T^*(t) = 0$  für alle  $t \in [t_0, T]$  bestimmt ist. Dadurch folgt, dass auch  $\mathbf{x}_T^*(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)$  vorliegt. Somit muss aber

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}(t_0)^\top \mathbf{P}_T(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}(t_0)^\top \underbrace{\left( \int_{t_0}^T e^{\mathbf{A}^\top(t-t_0)} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} dt \right)}_{\mathbf{W}_b(t_0, T)} \mathbf{x}(t_0) = 0 \quad (\text{B.23})$$

erfüllt sein. Jedoch ist die Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{W}_b(t_0, T)$  wegen Annahme B.1 für  $t_0 < T$  positiv definit, vergleiche hierzu [84, Abschnitt 3.8], was zu einem Widerspruch führt.  $\square$

# C Anhang zu Kapitel 2

## C.1 Herleitungen zu Abschnitt 2.4.2

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das optimale Regelungsproblem 2.1 mit vorgegebenem Endwert und der Annahme 2.1 zur Steuerbarkeit sind in [39, Abschnitt 2.4] zu finden. Unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $\hat{t} = T - t$  in Abschnitt 2.4.2 sind die Bedingungen (2.52a) und (2.52b)

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \quad (\text{C.1a})$$

$$\dot{\phi}_T = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \phi_T, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_* \quad (\text{C.1b})$$

für die Hamilton-Funktion

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\phi}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}}^\top \mathbf{Q}_x \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{u}}^\top \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}) + \hat{\phi}^\top (-\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}) \quad (\text{C.2})$$

notwendig. Die Transversalitätsbedingung (2.52c) wird jedoch vollständig durch die Bedingung  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$  ersetzt.

Für die optimale Regelung gilt somit  $\hat{\mathbf{u}}_T^*(\hat{t}) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \hat{\phi}(\hat{t})$ . Analog zu Abschnitt 2.3.2 wird dann das zugehörige Hamiltonsche System bestimmt:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_T^* \\ \dot{\hat{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{Q}_x & \mathbf{A}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_T^* \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

mit den Randbedingungen  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_T$  und  $\hat{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{x}_0$ . Für dieses existiert immer eine eindeutige Lösung  $\hat{\mathbf{x}}_T^*(\hat{t})$  und  $\hat{\phi}(\hat{t})$ . Letztere wird im Folgenden analytisch berechnet. Hierzu wird hier eine kompaktere Variante der Sweep-Methode als in [39, Abschnitt 5.3] verwendet. Der Ansatz lautet

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = \hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}) \hat{\mathbf{x}}_T^*(\hat{t}) + \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})^\top \boldsymbol{\nu} \quad (\text{C.4})$$

für  $\nu \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t})$  und die Transitionsmatrix<sup>1)</sup>  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)$  wie in Abschnitt 2.4.2 gewählt werden. Der Ansatz wird in das Hamiltonsche System eingesetzt, um zu überprüfen, ob dieser gültig ist. In der Ableitung des Kozustandes  $\hat{\phi}$  ersetzt man  $\hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t})$  durch (2.89) und  $\hat{\mathbf{x}}_T^*$  mittels (C.3) und erhält dann die folgende Bedingung an  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)$ :

$$\dot{\hat{\mathbf{\Phi}}}(T, \hat{t})^\top = -(-\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{P}}_T(\hat{t}))^\top \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})^\top. \quad (\text{C.5})$$

Hierbei handelt es sich offenbar um das zu (2.90) adjungierte System. Da  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)$  die Transitionsmatrix des Systems (2.90) ist, ist nach Anhang B.4 somit  $\hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})^\top = (\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)^{-1})^\top$  die Transitionsmatrix des adjungierten Systems. Daher erfüllt  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)$  die Bedingung (C.5). Folglich führt der Ansatz (C.4) auf eine mögliche Lösung von (C.3), für die noch die Randbedingungen geprüft werden müssen. Der zeitvariante geschlossene Regelkreis ist durch (C.3) und (C.4) festgelegt. Für seine Zeitlösung muss daher gelten:

$$\hat{\mathbf{x}}_T^*(T) = \hat{\mathbf{\Phi}}(T, 0)\mathbf{x}_T - \underbrace{\int_0^T \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})^\top d\hat{t} \cdot \nu}_{\hat{\mathbf{W}}_s(T, 0)} \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_0. \quad (\text{C.6})$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die Transitionsmatrix des geschlossen Regelkreises durch  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, 0)$  mit (2.90) für  $\hat{\mathbf{\Phi}}(0, 0) = \mathbf{I}$  gegeben ist. Die gewichtete Gramsche Steuerbarkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{W}}_s(T, 0)$  ist aufgrund der vollständigen Steuerbarkeit für jedes  $T > 0$  positiv definit, siehe S. 45. Daher kann man (C.6) nach  $\nu$  auflösen und erhält (2.91), wodurch (C.6) für beliebige, gegebene  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_T$  erfüllt wird.

Zusammengefasst erfüllt die Lösung  $(\hat{\mathbf{x}}_T^*(\cdot), \hat{\mathbf{u}}_T^*(\cdot))$  für  $\hat{\mathbf{u}}_T^*(\cdot)$  aus (2.88) die notwendigen Optimalitätsbedingungen aus [39, Abschnitt 2.4] für beliebige  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_T$ . Zum Nachweis der Optimalität kann die Variationsrechnung wie in Abschnitt 2.3.2 angewendet werden. Es ist lediglich zu beachten, dass die Variationen wegen der Randbedingungen  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_T$  und  $\hat{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{x}_0$  sowohl  $\delta\hat{\mathbf{x}}(0) = 0$  als auch  $\delta\hat{\mathbf{x}}(T) = 0$  erfüllen müssen. Für die erste Variation in (2.48) ist daher ersichtlich, dass  $\delta^1 \hat{\mathcal{J}}_T^*(\delta\hat{\mathbf{u}}(\cdot)) = 0$  zutrifft, obwohl möglicherweise  $\hat{\phi}(T) \neq \mathbf{0}$ . Deshalb resultiert auch hier

$$\hat{\mathcal{J}}_{0,T}(\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}(\cdot)) - \hat{\mathcal{J}}_{0,T}(\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}_T^*(\cdot)) = \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 \hat{\mathcal{J}}_T^*(\delta\hat{\mathbf{u}}(\cdot)). \quad (\text{C.7})$$

<sup>1)</sup>Es sei an die Eigenschaft  $\hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{t}, T)^{-1} = \hat{\mathbf{\Phi}}(T, \hat{t})$  aus Anhang B.4 erinnert.

Die zweite Variation  $\delta^2 \hat{J}_T^*(\delta \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  entspricht (2.73), wenn man  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}$  durch  $\mathbf{Q}_x$  ersetzt. Der Nachweis der Optimalität für beliebige  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_T$  erfolgt daher analog zum Beweis von Satz 2.1, S. 41.

Die Herleitung der optimalen Kosten (2.93), die identisch zu den Kosten  $\hat{J}_{0,T}(\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}_T^*(\cdot))$  sind, wird abschließend skizziert. Hierzu wird die optimale Regelung (2.88) in  $\hat{J}_{0,T}(\mathbf{x}_T, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}_T^*(\cdot))$  eingesetzt und  $\mathbf{Q}_x$  mittels der Matrixdifferenzialgleichung (2.89) ausgetauscht. Mithilfe der Dynamik des geschlossenen Regelkreises, die sich nach Einsetzen von (C.4) in die obere Zeile von (C.3) ergibt, können dann entsprechende Terme durch  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_T^*$  substituiert werden. Nach dem Zusammenfassen zu  $\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}_T^{*\top} \hat{\mathbf{P}}_T(t) \hat{\mathbf{x}}_T^*$  mittels der Produktregel und Verwendung der gewichteten Gramschen Steuerbarkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{W}}_s(T, 0)$  können die Integrale berechnet werden. Ersetzt man anschließend  $\boldsymbol{\nu}$  durch (2.91) und nutzt  $\hat{\mathbf{P}}_T(T) = \mathbf{0}$ , so gelangt man letztendlich zu  $J_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T)$  in (2.93).

## C.2 Beweis zu Satz 2.3

Die Beweisführung erfolgt analog zu [76, Theorem 4.2], wie vor Satz 2.3 beschrieben. Sie wird um den Aspekt erweitert, dass für das linear-quadratische Folgeregelungsproblem immer  $\mu > 0$  in den Bedingungen (2.95) gewählt werden kann. Hierzu wird im Beweis zunächst die vollständige Steuerbarkeit von  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  vorausgesetzt und im Anschluss das Entfallen dieser Annahme untersucht.

*Beweis zu Satz 2.3.* Wenn die Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  eines der Optimalitätskriterien aus Definition 2.3 erfüllt, dann ist sie in jedem Fall endlich optimal und löst daher das Problem 2.2 für beliebige  $T > 0$ . Es sei zunächst angenommen, dass das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  vollständig steuerbar ist. Unter dieser Annahme sind die notwendigen Bedingungen für das Problem 2.2 über einen Horizont  $[0, T]$  aus [39, Abschnitt 2.4] bekannt. Unter Einführung eines beliebigen Skalierungsfaktors  $\hat{\mu}_T > 0$ , der im Laufe der Beweisführung benötigt wird, lauten diese

$$\dot{\hat{\phi}}_T = - \left. \frac{\partial \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\phi}_T, \hat{\mu}_T, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_*, \quad (\text{C.8a})$$

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\phi}_T, \hat{\mu}_T, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_* \quad (\text{C.8b})$$



mit dem Kozustand  $\hat{\phi}_T(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , der skalierten Hamilton-Funktion

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\phi}_T, \hat{\mu}_T, t) = \frac{\hat{\mu}_T}{2} ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}) + \hat{\phi}_T^\top (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.9})$$

und der Endwertbedingung  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*(T)$ . Die Endwertbedingung ist für die endliche optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  trivialerweise bereits erfüllt und muss nicht weiter berücksichtigt werden. Die verbleibenden Bedingungen sind bekannterweise invariant bezüglich einer solchen Skalierung der Hamilton-Funktion (siehe z. B. [74, 76] oder Fußnote 16), S. 47, im Abschnitt 2.5.1). Da  $\hat{\mu}_T > 0$  beliebig gewählt werden kann, ist es o. B. d. A. möglich zu fordern, dass

$$\left\| \begin{bmatrix} \hat{\mu}_T & \hat{\phi}_T(0)^\top \end{bmatrix} \right\|_2 = 1 \quad (\text{C.10})$$

erfüllt<sup>2)</sup> wird. Um nun mithilfe von (C.8) die Bedingungen für endliche Optimalität herzuleiten, wird der Übergang  $T \rightarrow \infty$  im Folgenden genauso wie in [76] vollzogen. Aufgrund von (C.10) ist sowohl  $\hat{\mu}_T$  als auch  $\hat{\phi}_T(0)$  beschränkt für jedes  $T \in [0, \infty)$ . Wie in [74, Beweis von Theorem 3.67] angemerkt, existieren daher nach dem *Satz A.1 von Bolzano-Weierstraß*, S. 215, konvergente Teilfolgen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mu}_{T_i} = \hat{\mu}, \quad (\text{C.11a})$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\phi}_{T_i}(0) = \hat{\phi}(0) \quad (\text{C.11b})$$

für Sequenzen  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $T_1 < T_2 < \dots$ , wobei  $\hat{\mu} \geq 0$  wegen  $\hat{\mu}_{T_i} > 0$ ,  $\left\| \begin{bmatrix} \hat{\mu} & \hat{\phi}(0)^\top \end{bmatrix} \right\|_2 = 1$  aufgrund von (C.10) und  $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \infty$  gelten. Weiterhin sei  $\hat{\phi}(t)$  die eindeutige Lösung von

$$\dot{\hat{\phi}} = - \frac{\partial \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\phi}, \hat{\mu}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_* \quad (\text{C.12})$$

zum Anfangswert  $\hat{\phi}(0)$  auf dem Intervall  $[0, \infty)$ . Da die Lösung  $\hat{\phi}_{T_i}(t)$  der linearen Differenzialgleichung (C.8a) stetig von ihrem Anfangswert  $\hat{\phi}_{T_i}(0)$  und dem Skalierungsfaktor  $\hat{\mu}_{T_i}$  abhängt, folgt  $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\phi}_{T_i}(t) = \hat{\phi}(t)$

---

<sup>2)</sup>Falls (C.8) für  $\hat{\mu}_T$  und  $\hat{\phi}_T$  erfüllt sind, dann auch für  $\frac{\hat{\mu}_T}{\gamma}$  und  $\frac{\hat{\phi}_T}{\gamma}$  mit  $\gamma = \sqrt{\hat{\mu}_T^2 + \hat{\phi}_T^2}$ , vergleiche hierzu [76].

nach [76]. Aus der Linearität von (C.8b) bezüglich  $\hat{\phi}_{T_i}$  und  $\hat{\mu}_{T_i}$  resultiert darüber hinaus nach der Grenzwertbildung, dass

$$0 = \left. \frac{\partial \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\phi}, \hat{\mu}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_*. \quad (\text{C.13})$$

Soweit wurde gezeigt, dass die Existenz von  $\hat{\mu} \geq 0$  und  $\hat{\phi}(0)$ , sodass (C.12) und (C.13) von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  für alle  $t \in [0, \infty)$  erfüllt werden, notwendig für die endliche Optimalität von  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  für das Problem  $\text{OFP}_{\infty 2.1}$  ist.

Es wird noch nachgewiesen, dass  $\hat{\mu} > 0$  ebenfalls notwendig ist. Angenommen, es sei  $\hat{\mu} = 0$ , was zu

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \hat{\phi}, 0, t) = \hat{\phi}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.14})$$

führt. Nach (C.12) erfüllt der Kozustand  $\dot{\hat{\phi}} = -\mathbf{A}^\top \hat{\phi}$  mit dem Anfangswert  $\hat{\phi}(0) \neq \mathbf{0}$  wegen (C.10) und ist durch  $\hat{\phi}(t) = e^{-\mathbf{A}^\top t} \hat{\phi}(0)$  eindeutig bestimmt. Weiterhin fordert dann (C.13), dass  $\hat{\phi}(t)^\top \mathbf{B} = 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Im Widerspruch dazu steht aber die vollständige Steuerbarkeit von  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ . Da der Kozustand eine Lösung des zu  $\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi$  adjungierten Systems ist,<sup>3)</sup> impliziert die vollständige Steuerbarkeit von  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  nach [150, Korollar 3.5.9], dass es keine Lösung  $\hat{\phi}(t) \neq \mathbf{0}$  gibt, die  $\hat{\phi}(t)^\top \mathbf{B} = 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$  erfüllt. Folglich muss  $\hat{\mu} > 0$  gelten.

Nachdem man (C.12) und (C.13) durch  $\hat{\mu}$  dividiert und  $\phi(t) = 1/\hat{\mu} \cdot \hat{\phi}(t)$  substituiert, erhält man die Bedingungen (2.97), die von einer endlich optimalen Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  notwendigerweise erfüllt werden.

Es verbleibt lediglich nachzuweisen, dass diese ebenfalls gültig sind, wenn  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  nicht vollständig steuerbar ist. Dies sei nun angenommen und der triviale Fall  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  ausgeschlossen. Es existiert immer eine Zerlegung der Systemdynamik (2.1a) wie in Anhang B.2:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{d1} \\ \mathbf{E}_{d2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{C.15})$$

sodass  $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1)$  vollständig steuerbar ist. Da die nicht steuerbare Dynamik des Zustandes  $\mathbf{x}_2$  nicht mehr von der Stellgröße abhängt, ist  $\mathbf{x}_2(t)$  durch (C.15) und die Anfangswerte  $\mathbf{x}_2(0)$  sowie  $\bar{\mathbf{x}}_0$  eindeutig bestimmt. Somit ist  $\mathbf{x}_2(t)$  für jede zulässige Lösung identisch und insbesondere ist

<sup>3)</sup>Siehe hierzu Anhang B.4.

$\mathbf{x}_2(T) = \mathbf{x}_2^*(T)$  für jedes  $T > 0$  erfüllt. Die Endwertbedingung zu  $\mathbf{x}_2$  kann demnach entfallen. Daher wäre es o. B. d. A. möglich, die Dynamik von  $\mathbf{x}_2$  in das Exosystem (2.2a) zu integrieren. Die resultierenden, auf das vollständig steuerbare Teilsystem reduzierten Bedingungen (2.97) müssten dann von der zulässigen Lösung  $(\mathbf{x}_1^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  wegen der obigen Herleitung erfüllt werden. Es wird noch gezeigt, dass eine solche Reduzierung der Bedingungen nicht nötig ist. Betrachtet man nämlich das Gesamtsystem (C.15) und zerlegt den Kozustand analog, so folgt aus (2.97a)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11}^\top & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{12}^\top & -\mathbf{A}_{22}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^\top \mathbf{Q} \\ \mathbf{C}_2^\top \mathbf{Q} \end{bmatrix} \left( [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \mathbf{x}_2^* \end{bmatrix} + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}} \right) \quad (\text{C.16})$$

mit den Anfangswerten  $\phi_1(0)$ ,  $\phi_2(0)$  und aus (2.97b) resultiert

$$\mathbf{R}\mathbf{u}^* + [\mathbf{B}_1^\top \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{u}^* + \mathbf{B}_1^\top \phi_1 = \mathbf{0}. \quad (\text{C.17})$$

Auf Basis der vorangegangenen Überlegung sind die Bedingungen, gegeben durch die Dynamik von  $\phi_1(t)$  in (C.16) und die Gleichung (C.17), durch  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  erfüllt. Für jeden beliebigen Anfangswert  $\phi_2(0)$  existiert auch immer eine eindeutige Funktion  $\phi_2(t)$ , für die die zweite Zeile von (C.16) gültig ist. Es folgt, dass die Bedingungen (2.97a) und (2.97b) im Satz von einer endlich optimalen Lösung  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  erfüllt werden.  $\square$

## D Anhang zu Kapitel 3

### D.1 Herleitungen zu Abschnitt 3.4.3

Um die Transitionskosten  $\tilde{J}_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$  zu berechnen, werden sie zunächst als die Kostendifferenz

$$\Delta J_{0,T}(\tilde{\mathbf{x}}^*(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot)) = J_{0,T}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}^*(\cdot)) - J_{0,T}(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (\text{D.1})$$

ausgedrückt. Diese wird nun mittels der Variationsrechnung bestimmt. Hierzu fasst man  $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$  als eine Lösung auf, die gemäß der Superposition (3.11) durch die Variation

$$(\delta \mathbf{x}(\cdot), \delta \mathbf{u}(\cdot)) = (\tilde{\mathbf{x}}^*(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}^*(\cdot)) \quad (\text{D.2})$$

aus der überholend optimalen Lösung  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zum Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}_0$  hervorgeht. Die Kostendifferenz kann dann ähnlich zu (2.101) in Abschnitt 2.5.1 bestimmt werden. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass jetzt auch eine Variation  $\delta \mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}^*(0) \neq \mathbf{0}$  des Anfangswertes vorliegt, falls  $\mathbf{x}_0 \neq \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}_0$ . Diese muss wie in (2.48) berücksichtigt werden. Es resultiert

$$\tilde{J}_{0,T}^*(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) = \phi(0)^\top \tilde{\mathbf{x}}^*(0) - \phi(T)^\top \tilde{\mathbf{x}}^*(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{\mathbf{x}}^{*\top} \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}^* + \tilde{\mathbf{u}}^{*\top} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}^*) dt. \quad (\text{D.3})$$

Ersetzt man  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}$  mittels der algebraischen Riccatigleichung (3.15) und setzt auch das Regelgesetz  $\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^*(t)$  ein, so kann das Integral explizit zu  $-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^*(t)^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \Big|_{t=0}^{t=T}$  berechnet werden. Berücksichtigt man außerdem, dass der Kozustand nach (3.17) für die optimale Lösung  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zum Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}_0$  durch  $\phi(t) = \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(t)$  gegeben ist, so erhält man die Transitionskosten

$$\tilde{J}_{0,T}^*(\cdot) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^*(0)^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^*(0) - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^*(T)^\top \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}^*(T) + \bar{\mathbf{x}}_0^\top \Pi_\phi^\top \tilde{\mathbf{x}}^*(0) - \bar{\mathbf{x}}(T)^\top \Pi_\phi^\top \tilde{\mathbf{x}}^*(T). \quad (\text{D.4})$$

## D.2 Beweis zu Lemma 3.1

*Beweis zu Lemma 3.1.* Vor dem Beweis der ersten Aussage (3.89) wird die Existenz einer Konstanten  $M_\Phi > 0$  nachgewiesen, sodass für die Transitionsmatrix für jedes  $T > 0$  die Schranke  $\|\Phi_T(t, t_0)\|_2 \leq M_\Phi$  gilt. Es wird der geschlossene Regelkreis (3.88) umgeformt zu

$$\dot{z}_T = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})z_T - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \tilde{\mathbf{P}}_T(t)z_T, \quad (\text{D.5})$$

wobei  $\tilde{\mathbf{P}}_T(t) := \mathbf{P}_T(t) - \mathbf{P}$  definiert sei. Es sei  $\mathbf{A}_{\text{cl}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}$ . Zu dieser Dynamik lautet die Lösung für einen beliebigen Anfangswert  $z(t_0) = z_0$  wie folgt

$$z_T(t) = e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}(t-t_0)} z_0 - \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \tilde{\mathbf{P}}(\tau) z_T(\tau) d\tau. \quad (\text{D.6})$$

Nach Lemma 2.1 (für  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C}$ ) ist für ein  $\tilde{M}_P > 0$  die Ungleichung

$$\|\tilde{\mathbf{P}}_T(t)\|_2 \leq \tilde{M}_P e^{-2\alpha(T-t)} \quad (\text{D.7})$$

für jedes  $T > 0$  und alle  $t \in [0, T]$  gültig, wobei  $\alpha$  in Lemma 2.1, S. 57, äquivalent zu Lemma 3.1 definiert ist. Da  $\mathbf{A}_{\text{cl}}$  eine Hurwitzmatrix ist und daher  $\|e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}(t-t_0)}\|_2 \leq M_{\text{cl}}$  für beliebige  $t \geq t_0 \geq 0$  wegen (3.87a) zutrifft, folgt hieraus die Gültigkeit der Ungleichung

$$\|z_T(t)\|_2 \leq M_{\text{cl}}\|z_0\|_2 + \int_{t_0}^t \underbrace{M_{\text{cl}}\tilde{M}_P\|\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\|_2}_{\zeta_T(\tau):=} e^{-2\alpha(T-\tau)} \|z_T(\tau)\|_2 d\tau. \quad (\text{D.8})$$

Da  $\|z_T(t)\|_2$  eine stetige Funktion ist,  $M_{\text{cl}}\|z_0\|_2$  konstant ist und die stetige Funktion  $\zeta_T(t)$  keine negativen Werte annimmt, ist aufgrund von (D.8) ebenfalls die *Grönwall-Bellman Ungleichung*

$$\|z_T(t)\|_2 \leq M_{\text{cl}}\|z_0\|_2 e^{\left(\int_{t_0}^t \zeta_T(\tau) d\tau\right)} \quad (\text{D.9})$$

gültig, siehe [19, Lemma 1 in Kap. 2] oder [103, Lemma A.1]. Es ist leicht nachzuvollziehen, dass es ein  $M > 0$  gibt, sodass

$$\int_{t_0}^t \zeta_T(\tau) d\tau \leq M \quad (\text{D.10})$$

für jedes  $T > 0$ , alle  $t_0 \in [0, T]$  und alle  $t \in [t_0, T]$  erfüllt wird. Aus (D.9) und (D.10) folgt, dass ein  $M_\Phi > 0$  existiert, sodass  $\|\mathbf{z}_T(t)\|_2 \leq M_\Phi \|\mathbf{z}_0\|_2$  für jedes  $T > 0$  und jedes  $\mathbf{z}_0$  zutrifft. Mit der Transitionsmatrix  $\Phi_T(t, t_0)$  gilt wegen  $\mathbf{z}_T(t) = \Phi_T(t, t_0)\mathbf{z}_0$  auch  $\|\Phi_T(t, t_0)\mathbf{z}_0\|_2 \leq M_\Phi \|\mathbf{z}_0\|_2$  für jedes  $\mathbf{z}_0$ . Mittels der Definition der Spektralnorm folgt daraus

$$\|\Phi_T(t, t_0)\|_2 = \max_{\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{0}} \frac{\|\Phi_T(t, t_0)\mathbf{z}_0\|_2}{\|\mathbf{z}_0\|_2} \leq M_\Phi \quad (\text{D.11})$$

für jedes  $T > 0$ , alle  $t_0 \in [0, T]$  und alle  $t \in [t_0, T]$ .

Nun wird die erste Aussage (3.89) bewiesen. Es sei  $\mathbf{z}(t)$  die Lösung des zeitinvarianten geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})\mathbf{z} \quad (\text{D.12})$$

zum Anfangswert  $\mathbf{z}_0$ . Dann ist der Fehler

$$\tilde{\mathbf{z}}_T(t) := \mathbf{z}_T(t) - \mathbf{z}(t) \quad (\text{D.13})$$

aufgrund von (D.5) die Lösung der Dynamik

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_T = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})\tilde{\mathbf{z}}_T - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \tilde{\mathbf{P}}_T(t)\mathbf{z}_T \quad (\text{D.14})$$

zum Anfangswert  $\tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{0}$ . Auf analogem Wege wie (D.8) wird für deren Lösung  $\tilde{\mathbf{z}}_T(t)$  die Ungleichung

$$\|\tilde{\mathbf{z}}_T(t)\|_2 \leq \int_{t_0}^t M_{\text{cl}} \widetilde{M}_P \|\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\|_2 e^{-2\alpha(T-\tau)} \|\mathbf{z}_T(\tau)\|_2 d\tau \quad (\text{D.15})$$

hergeleitet, wobei  $\|e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}(t-t_0)}\| \leq M_{\text{cl}}$  und (D.7) verwendet werden. Nutzt man  $\|\mathbf{z}_T(t)\|_2 \leq M_\Phi \|\mathbf{z}_0\|_2$ , so resultiert aus der Integration, dass ein  $\widetilde{M}_\Phi > 0$  existiert, sodass für jedes  $\mathbf{z}_0$  die Ungleichung

$$\|\tilde{\mathbf{z}}_T(t)\|_2 \leq \widetilde{M}_\Phi e^{-2\alpha(T-t)} \|\mathbf{z}_0\|_2 \quad (\text{D.16})$$

für jedes  $T > 0$ , alle  $t_0 \in [0, T]$  und alle  $t \in [t_0, T]$  gilt. Aus der Definition des Fehlers (D.13) erhält man auch

$$\tilde{\mathbf{z}}_T(t) = (\Phi_T(t, t_0) - e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}(t-t_0)})\mathbf{z}_0. \quad (\text{D.17})$$

Verwendet man die Definition der Spektralnorm analog zu (D.11), so resultiert die Aussage (3.89) direkt aus

$$\|\Phi_T(t, t_0) - e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}(t-t_0)}\|_2 = \max_{\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{0}} \frac{\|\tilde{\mathbf{z}}_T(t)\|_2}{\|\mathbf{z}_0\|_2} \leq \widetilde{M}_\Phi e^{-2\alpha(T-t)}. \quad (\text{D.18})$$

Es folgt der Beweis der zweiten Aussage (3.90). Zunächst ist mithilfe der Entwurfsgleichungen (3.13) und (3.15) festzustellen, dass die eingeführte Matrix  $\mathbf{\Pi}_\infty = \mathbf{\Pi}_\phi - \mathbf{P}\mathbf{\Pi}_x^*$  die Sylvestergleichung

$$\mathbf{\Pi}_\infty \bar{\mathbf{A}} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})^\top \mathbf{\Pi}_\infty - (\mathbf{P}\mathbf{E}_d + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})) \quad (\text{D.19})$$

löst, siehe hierzu auch [107] oder die Veröffentlichung [22]. Es sei

$$\mathbf{v}_T(t) := \mathbf{\Pi}_T(t) \bar{\mathbf{x}}(t), \quad (\text{D.20a})$$

$$\mathbf{v}_\infty(t) := \mathbf{\Pi}_\infty \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (\text{D.20b})$$

Durch Differentiation unter Einbeziehung der Matrixdifferenzialgleichung (2.79) für  $\mathbf{\Pi}_T(t)$  und der Sylvestergleichung (D.19) lässt sich zeigen, dass diese Lösungen der Dynamik

$$\dot{\mathbf{v}}_T = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}_T(t))^\top \mathbf{v}_T - (\mathbf{P}_T(t)\mathbf{E}_d + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})) \bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{D.21})$$

mit dem Endwert  $\mathbf{v}_T(T) = \mathbf{0}$  bzw. der Dynamik

$$\dot{\mathbf{v}}_\infty = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P})^\top \mathbf{v}_\infty - (\mathbf{P}\mathbf{E}_d + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})) \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{D.22})$$

mit dem Anfangswert  $\mathbf{v}_\infty(0) = \mathbf{\Pi}_\infty \bar{\mathbf{x}}_0$  sind. Es ist nachvollziehbar, dass die Lösung von (D.21) zu  $\mathbf{v}_T(T) = \mathbf{0}$  ebenso durch

$$\mathbf{v}_T(t) = \int_t^T \mathbf{\Phi}_T(\tau, t)^\top (\mathbf{P}_T(\tau)\mathbf{E}_d + \mathbf{C}^\top \mathbf{Q}(\mathbf{D}_d - \bar{\mathbf{C}})) \bar{\mathbf{x}}(\tau) d\tau \quad (\text{D.23})$$

gegeben ist.<sup>1)</sup> Da  $t_0 \in [0, T]$  in (D.11) beliebig gewählt werden kann, gilt auch  $\|\mathbf{\Phi}_T(\tau, t)^\top\|_2 \leq M_\Phi$  für alle  $\tau \in [t, T]$ . Weiterhin folgt aus Lemma 2.1, S. 57, dass es ein  $M_P > 0$  gibt, sodass  $\|\mathbf{P}_T(t)\|_2 \leq M_P$  für jedes  $T > 0$  und alle  $t \in [0, T]$  gilt. Bezieht man noch

$$\|\bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 = \|\mathbf{e}^{\bar{\mathbf{A}}t} \bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \leq \bar{M} \mathbf{e}^{\bar{\alpha}t} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (\text{D.24})$$

für jedes  $\bar{\mathbf{x}}_0$  wegen (3.87b) mit ein, so impliziert (D.23), dass für ein  $M_v > 0$

$$\|\mathbf{v}_T(t)\|_2 \leq M_v \mathbf{e}^{\bar{\alpha}T} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (\text{D.25})$$

<sup>1)</sup>Hierzu differenziert man (D.23) nach dem „Parameter“  $t$  unter Anwendung der Leibniz-Regel [138] und berücksichtigt dabei, dass  $\mathbf{\Phi}_T(\tau, t)^\top$  die Transitionsmatrix des zu (3.88) adjungierten Systems ist, vgl. Anhang B.4, S. 223.

für jedes  $T > 0$  und alle  $t \in [0, T]$  erfüllt wird. Infolge der Dynamiken (D.21) und (D.22) ist der Fehler

$$\tilde{\mathbf{v}}_T(t) := \mathbf{v}_T(t) - \mathbf{v}_\infty(t) = (\mathbf{\Pi}_T(t) - \mathbf{\Pi}_\infty)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{D.26})$$

die Lösung von

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_T = -\mathbf{A}_{\text{cl}}^\top \tilde{\mathbf{v}}_T + \tilde{\mathbf{P}}_T(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{v}_T(t) - \tilde{\mathbf{P}}_T(t) \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{D.27})$$

zum Endwert  $\tilde{\mathbf{v}}_T(T) = -\mathbf{\Pi}_\infty \bar{\mathbf{x}}(T)$ , wobei  $\mathbf{A}_{\text{cl}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}$  und  $\tilde{\mathbf{P}}_T(t) = \mathbf{P}_T(t) - \mathbf{P}$  wie zuvor gegeben sind. Der Fehler ist daher durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_T(t) = & -e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}^\top(T-t)} \mathbf{\Pi}_\infty \bar{\mathbf{x}}(T) \\ & - \int_t^T e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}^\top(\tau-t)} \tilde{\mathbf{P}}_T(\tau) (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{v}_T(\tau) - \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

bestimmt. Unter Verwendung von  $\|e^{\mathbf{A}_{\text{cl}}^\top(T-t)}\|_2 \leq M_{\text{cl}} e^{-\alpha(T-t)}$  nach (3.87a) und den Ungleichungen (D.24) für  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , (D.7) für  $\tilde{\mathbf{P}}_T(t)$  und (D.25) für  $\mathbf{v}_T(t)$  resultiert

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_T(t)\|_2 \leq M_1 e^{-\alpha(T-t)} e^{\bar{\alpha}T} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (\text{D.29})$$

$$+ \int_t^T e^{-\alpha(\tau-t)} e^{-2\alpha(T-\tau)} (M_2 e^{\bar{\alpha}T} + M_3 e^{\bar{\alpha}\tau}) \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 d\tau \quad (\text{D.30})$$

$$\leq M_1 e^{-\alpha(T-t)} e^{\bar{\alpha}T} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 + M_4 e^{-\alpha(T-t)} e^{\bar{\alpha}T} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (\text{D.31})$$

$$\leq \widetilde{M}_\Pi e^{\alpha t} e^{-(\alpha-\bar{\alpha})T} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (\text{D.32})$$

für jedes  $T > 0$  und jedes  $t \in [0, T]$ , wobei  $M_1, M_2, M_3, M_4, \widetilde{M}_\Pi > 0$  entsprechend gewählt seien. Die zweite Ungleichung ergibt sich aus der Integration, wenn man die negativen Terme, die durch das Einsetzen der unteren Integrationsgrenze entstehen, vernachlässigt. Auf Basis der Definition von  $\mathbf{v}_T(t)$  und  $\mathbf{v}_\infty(t)$  impliziert dies mit  $\tilde{\mathbf{v}}_T(t) = \mathbf{v}_T(t) - \mathbf{v}_\infty(t)$  sofort die Ungleichung (3.90).  $\square$

## D.3 Beweis zu Satz 3.4

Die Ungleichung (3.91a) zu  $\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)$  wird mithilfe der Lösungen  $\mathbf{x}_T^*(t)$  und  $\mathbf{x}^*(t)$  der mit  $\mathbf{u}_T^*(t)$  bzw.  $\mathbf{u}^*(t)$  geschlossenen Regelkreise bestimmt.



Dazu werden die Ergebnisse aus Lemma 3.1, S. 96, und dessen Beweis aus Anhang D.2 verwendet. Auf Basis von (3.91a) folgt die Ungleichung (3.91b) unmittelbar aus der Differenz der Regelgesetze  $\mathbf{u}_T^*(t)$  aus (2.80) und  $\mathbf{u}^*(t)$  aus (3.19) unter Einbeziehung von  $\mathbf{\Pi}_\infty = \mathbf{\Pi}_\phi - \mathbf{P}\mathbf{\Pi}_x^*$ . Weiterhin wird gezeigt, dass  $\alpha > \bar{\alpha}$  durch die Eigenwertbedingungen impliziert ist, woraus die Grenzwertbildung (3.93) aus den vorangegangenen Ungleichungen (3.91) hervorgeht.

*Beweis zu Satz 3.4.* Bekanntlich ist  $\mathbf{x}_T^*(t)$  die Lösung von (2.75) und  $\mathbf{x}^*(t)$  löst die Systemdynamik (3.1a) für das aus (3.19) umgeformte Regelgesetz

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}^* \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\infty \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{D.33})$$

mit  $\mathbf{\Pi}_\infty = \mathbf{\Pi}_\phi - \mathbf{P}\mathbf{\Pi}_x^*$ , beide zum Anfangswert  $\mathbf{x}_0$ . Mit der Transitionsmatrix  $\Phi_T(t, 0)$  aus Lemma 3.1 können diese angegeben werden

$$\mathbf{x}_T^*(t) = \Phi_T(t, 0) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi_T(t, \tau) (-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_T(\tau) + \mathbf{E}_d) \bar{\mathbf{x}}(\tau) d\tau, \quad (\text{D.34a})$$

$$\mathbf{x}^*(t) = e^{\mathbf{A}_{cl}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}_{cl}(t-\tau)} (-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\infty + \mathbf{E}_d) \bar{\mathbf{x}}(\tau) d\tau, \quad (\text{D.34b})$$

wobei  $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P}$ . Definiert man

$$\tilde{\Phi}_T(t_1, t_0) := \Phi_T(t_1, t_0) - e^{\mathbf{A}_{cl}(t_1-t_0)}, \quad (\text{D.35})$$

dann ist der Fehler als Differenz  $\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t) := \mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{x}^*(t)$  bestimmt durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_T^*(t) = & \tilde{\Phi}_T(t, 0) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \left( -\Phi_T(t, \tau) \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{\Pi}_T(\tau) - \mathbf{\Pi}_\infty) \right. \\ & \left. + \tilde{\Phi}_T(t, \tau) (-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\infty + \mathbf{E}_d) \right) \bar{\mathbf{x}}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Aus (D.11) im Beweis von Lemma 3.1 ist bekannt, dass  $\|\Phi_T(t, 0)\|_2 \leq M_\Phi$  für jedes  $t \in [0, T]$  gilt. Verwendet man nun die Ungleichungen (3.89) für

$\tilde{\Phi}_T(t, 0)$  und  $\tilde{\Phi}_T(t, \tau)$ , (3.90) für  $(\Pi_T(t) - \Pi_\infty)\bar{\mathbf{x}}(t)$  sowie (D.24) für  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  so führt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t)\|_2 &\leq \|\tilde{\Phi}_T(t, 0)\|_2 \|\mathbf{x}_0\|_2 + \int_0^t \left( M_1 \|\Phi_T(t, \tau)\|_2 \|(\Pi_T(\tau) - \Pi_\infty)\bar{\mathbf{x}}(\tau)\|_2 \right. \\ &\quad \left. + M_2 \|\tilde{\Phi}_T(t, \tau)\|_2 \|\bar{\mathbf{x}}(\tau)\|_2 \right) d\tau \quad (\text{D.37}) \end{aligned}$$

mit  $M_1 = \|\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\|_2$  und  $M_2 = \|\mathbf{E}_d - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\Pi_\infty\|_2$  zu

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t)\|_2 &\leq \widetilde{M}_\Phi e^{-2\alpha(T-t)} \|\mathbf{x}_0\|_2 + \int_0^t \left( M_1 M_\Phi \widetilde{M}_\Pi e^{\alpha\tau} e^{-(\alpha-\bar{\alpha})T} \right. \\ &\quad \left. + M_2 \widetilde{M}_\Phi \overline{M} e^{-2\alpha(T-t)} e^{\bar{\alpha}\tau} \right) \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 d\tau. \quad (\text{D.38}) \end{aligned}$$

Nach der Integration und der Vernachlässigung der negativen Terme infolge der unteren Integrationsgrenze kann man die obere Schranke mit

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t)\|_2 &\leq \widetilde{M}_\Phi e^{-2\alpha(T-t)} \|\mathbf{x}_0\|_2 + \left( \frac{1}{\alpha} M_1 M_\Phi \widetilde{M}_\Pi e^{-(\alpha-\bar{\alpha})T} e^{\alpha t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\alpha}} M_2 \widetilde{M}_\Phi \overline{M} e^{-2\alpha(T-t)} e^{\bar{\alpha} t} \right) \|\bar{\mathbf{x}}_0\|_2 \quad (\text{D.39}) \end{aligned}$$

angeben. Aufgrund von  $\alpha, \bar{\alpha} > 0$  ist es weiterhin leicht nachzuvollziehen, dass die Terme  $e^{-2\alpha(T-t)}$  und  $e^{-2\alpha(T-t)} e^{\bar{\alpha} t}$  kleiner gleich  $e^{-(\alpha-\bar{\alpha})T} e^{\alpha t}$  sind für alle  $T \geq t \geq 0$ . Folglich findet man auf Basis von (D.39) immer ein  $M_x := M_x(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$ , sodass die erste Ungleichung (3.91a) erfüllt wird.

Um die zweite Ungleichung (3.91b) nachzuweisen, setzt man zunächst

$$\phi_T(t) - \phi(t) = \mathbf{P}_T(t)\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t) + \tilde{\mathbf{P}}_T(t)\mathbf{x}^*(t) + (\Pi_T(t) - \Pi_\infty)\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (\text{D.40})$$

auf Basis von (2.74) und (3.17) mit  $\Pi_\infty = \Pi_\phi - \mathbf{P}\Pi_x^*$  sowie mit  $\tilde{\mathbf{P}}_T(t) := \mathbf{P}_T(t) - \mathbf{P}$  an. Wegen Lemma 2.1 existiert ein  $M_P > 0$ , sodass  $\|\mathbf{P}_T(t)\|_2 \leq M_P$  für jedes  $T > 0$  und alle  $t \in [0, T]$  gilt. Weiterhin ist für alle  $t \geq 0$  die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}^*(t)\|_2 = \|\tilde{\mathbf{x}}^*(t) + \Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq M_{cl} e^{-\alpha t} \|\tilde{\mathbf{x}}^*(0)\|_2 + \|\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \quad (\text{D.41})$$

aufgrund der Fehlerdynamik (3.16) und (3.87a) erfüllt. Berücksichtigt man diese Ungleichungen sowie (D.7) für  $\tilde{\mathbf{P}}_T(t)$ , (D.24) für  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , (3.90) für

$(\Pi_T(t) - \Pi_\infty)\bar{\mathbf{x}}(t)$  und (3.91a) für  $\tilde{\mathbf{x}}_T^*(t)$ , so folgt aus (D.40) die Existenz eines  $M_\phi := M_\phi(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0) > 0$ , das die Ungleichung

$$\|\phi_T(t) - \phi(t)\|_2 \leq M_\phi e^{\alpha t} e^{-(\alpha - \bar{\alpha})T} \quad (\text{D.42})$$

für alle  $T \geq t \geq 0$  garantiert. Aus  $\mathbf{u}_T^*(t) - \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top(\phi_T(t) - \phi(t))$  schließt man sofort auf die Ungleichung (3.91b).

Die beiden Resultate zur Konvergenz (3.93) werden direkt durch die Ungleichungen (3.91) impliziert, falls für  $\alpha$  und  $\bar{\alpha}$  aus (3.87) gilt

$$\alpha > \bar{\alpha}. \quad (\text{D.43})$$

Die Eigenwertbedingung (3.92) garantiert, dass für ein  $\epsilon > 0$

$$\min_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A}_{\text{cl}})} (-\Re\{\lambda\}) > \max_{\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})} \Re\{\bar{\lambda}\} + 2\epsilon \quad (\text{D.44})$$

mit  $\mathbf{A}_{\text{cl}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\mathbf{P}$  zutrifft. Das Minimum nehme den Wert  $\lambda_{\min} > 0$  an und das Maximum den Wert  $\bar{\lambda}_{\max} \geq 0$ . Die Bedingungen (3.87) werden dann durch die mögliche Wahl  $\alpha = \lambda_{\min} - \epsilon > 0$  und  $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}_{\max} + \epsilon > 0$  garantiert und (D.44) impliziert (D.43), da

$$\lambda_{\min} > \bar{\lambda}_{\max} + 2\epsilon \Leftrightarrow \lambda_{\min} - \epsilon > \bar{\lambda}_{\max} + \epsilon \Leftrightarrow \alpha > \bar{\alpha}. \quad (\text{D.45})$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

## D.4 Beweis zu Satz 3.6

Im Beweis wird mittels der Variationsrechnung eine untere Schranke der Kostendifferenz  $\Delta J_{0,T}(\cdot)$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_T^*(t)$  bestimmt. Mithilfe der oberen Schranke (3.101) und dem Turnpike Resultat (3.95) aus Satz 3.5 wird auf das Ergebnis (3.102) geschlossen.

*Beweis zu Satz 3.6.* Den Ausführungen in Abschnitt 2.3.2 folgend lautet die Kostendifferenz für die zulässige Lösung  $(\mathbf{x}_T(\cdot), \mathbf{u}_T(\cdot))$

$$\Delta J_{0,T}(\delta\mathbf{x}(\cdot), \delta\mathbf{u}(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (\delta\mathbf{x}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}^\top \mathbf{R} \delta\mathbf{u}) dt \quad (\text{D.46})$$

mit der Variation der Stellgröße  $\delta\mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{u}_T(\cdot) - \mathbf{u}_T^*(\cdot)$  und des Zustandes  $\delta\mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{x}_T(\cdot) - \mathbf{x}_T^*(\cdot)$ , die eine Lösung der Dynamik  $\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}$  zum

Anfangswert  $\delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  bilden. Es wird eine untere Schranke der Kostendifferenz in Abhängigkeit von  $\|\delta \mathbf{x}(t)\|_2$  für jeden Zeitpunkt  $t \in [T_1, T - T_2]$  bestimmt.

Für ein beliebiges  $t_1 \in [T_1, T - T_2]$  wird ein optimales Regelungsproblem auf dem Teilintervall  $[t_1, T]$  formuliert:

$$\min_{\delta \hat{\mathbf{u}}(\cdot)} \Delta J_{t_1, T}(\delta \hat{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \hat{\mathbf{u}}(\cdot)) \quad (\text{D.47})$$

unter der Bedingung, dass  $(\delta \hat{\mathbf{x}}(\cdot), \delta \hat{\mathbf{u}}(\cdot))$  die Dynamik  $\dot{\delta \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \delta \hat{\mathbf{u}}$  zum Anfangswert  $\delta \hat{\mathbf{x}}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_1)$  löst. Wie aus Abschnitt 2.6 (für  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ ) bekannt ist, sind die minimalen Kosten durch

$$\Delta J_{0, t_1}^*(\cdot) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}(t_1)^T \mathbf{P}_T(t_1) \delta \mathbf{x}(t_1) \quad (\text{D.48})$$

gegeben, wobei  $\mathbf{P}_T(t)$  die Lösung der Riccatischen Matrixdifferentialgleichung (2.119) zum Endwert  $\mathbf{P}_T(T) = \mathbf{0}$  auf dem Intervall  $[t_1, T]$  ist. Nach Satz B.1 ist  $\mathbf{P}_T(t)$  positiv definit wegen der Annahme 3.4. Da außerdem  $t_1 \leq T - T_2$  und  $T_2 > 0$  gelten, geht  $\mathbf{P}_T(t_1) \succeq \mathbf{P}_T(T - T_2) \succ \mathbf{0}$  aus [110, Theorem 10] hervor. Die Eigenwerte von  $\mathbf{P}_T(T - T_2)$  sind reell und positiv. Sei  $\lambda_{\min} > 0$  der kleinste Eigenwert. Dann kann eine untere Schranke für die quadratische Form in (D.48) wie in [103, Kap. 4.4] angegeben werden:

$$\Delta J_{t_1, T}^*(\cdot) \geq \frac{\lambda_{\min}}{2} \|\delta \mathbf{x}(t_1)\|_2^2. \quad (\text{D.49})$$

Offensichtlich ist die gewünschte untere Schranke der Kostendifferenz (D.46) gefunden. Kombiniert man diese mit der oberen Schranke (3.101), so folgt

$$\frac{\lambda_{\min}}{2} \|\delta \mathbf{x}(t)\|_2^2 \leq \Delta^2 \quad (\text{D.50})$$

und damit auch, dass eine Konstante  $M_J > 0$  existiert, sodass

$$\|\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_T^*(t)\|_2 \leq M_J \Delta \quad (\text{D.51})$$

für jedes  $t \in [T_1, T - T_2]$  erfüllt wird. Weiterhin gilt die Dreiecksungleichung

$$\|\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq \|\mathbf{x}_T(t) - \mathbf{x}_T^*(t)\|_2 + \|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2. \quad (\text{D.52})$$

Nutzt man dies in Verbindung mit  $\|\mathbf{x}_T^*(t) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)\|_2 \leq \epsilon$  nach Satz 3.5 sowie die Ungleichung (D.51), so erhält man das Ergebnis (3.102).  $\square$

## D.5 Analytische Herleitung zum Gegenbeispiel 3.2

Es seien die optimale Lösung  $(x_T^*(\cdot), u_T^*(\cdot))$  nach Satz 2.1, S. 41, und die Lösung  $(\Pi_x^* \bar{x}(\cdot), -R^{-1}B^\top \Pi_\phi \bar{x}(\cdot))$  der Systemdynamik (3.1a) zum Anfangswert  $x_0 = \Pi_x^* \bar{x}_0$  gemäß Satz 3.1, S. 71, gegeben. Wie bereits diskutiert ist  $\Pi_x^* \bar{x}(\cdot)$  der einzige mögliche Kandidat für eine Turnpike. Es wird analytisch gezeigt, dass die Differenz  $|x_T^*(T - T_2) - \Pi_x^* \bar{x}(T - T_2)|$  für jedes gegebene  $T_2 > 0$  mit wachsender Länge  $T$  des Horizontes immer größer wird und damit  $\Pi_x^* \bar{x}(\cdot)$  die Bedingung (3.95) für eine Turnpike nicht erfüllt.

Die Abweichung von der Turnpike ist  $\delta x(t) = x_T^*(t) - \Pi_x^* \bar{x}(t)$ . Die zugehörige Abweichung der Stellgrößen lautet dann

$$\begin{aligned} \delta u &= u_T^* - (-R^{-1}B^\top \Pi_\phi \bar{x}) \\ &= -R^{-1}B^\top (P_T(t)x_T^* + \Pi_T(t)\bar{x} - (P\Pi_x^* + \Pi_\infty)\bar{x}) \\ &= -R^{-1}B^\top \left( P_T(t)\delta x + (P_T(t) - P)\Pi_x^* \bar{x} + (\Pi_T(t) - \Pi_\infty)\bar{x} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

wobei der Skalar  $P \approx 1,236 > 0$  die algebraische Riccatigleichung (3.15) löst und  $\Pi_\infty = \Pi_\phi - P\Pi_x^*$  genutzt wurde. Sie bilden eine Variation  $(\delta x(\cdot), \delta u(\cdot))$ , die eine Lösung der linearen Dynamik  $\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u$  mit  $A = -1$  und  $B = 1$  ist. Durch das Einsetzen von  $\delta u$  in die Dynamik erhält man

$$\delta \dot{x} = (-1 - P_T(t))\delta x - \left( (P_T(t) - P)\Pi_x^* + (\Pi_T(t) - \Pi_\infty) \right) \bar{x} \quad (\text{D.54})$$

mit  $BR^{-1}B^\top = 1$ . Es ist dann möglich, die Abweichung  $\delta x(t)$  auf einem Intervall  $[T_1, T - T_2]$  mit  $T_1, T_2 > 0$  sowie  $T > T_1 + T_2$  durch

$$\begin{aligned} x_T^*(T - T_2) - \Pi_x^* \bar{x}(T - T_2) &= \Phi_T(T - T_2, T_1)(x_T^*(T_1) - \Pi_x^* \bar{x}(T_1)) \\ &- \int_{T_1}^{T-T_2} \Phi_T(T - T_2, t) \left( (P_T(t) - P)\Pi_x^* + (\Pi_T(t) - \Pi_\infty) \right) \bar{x}(t) dt \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

zu berechnen, wobei  $\Phi_T(t, T_1)$  die Transitionsmatrix zu (3.88) ist und  $\Phi_T(T - T_2, t)$  der transponierten Transitionsmatrix des zu (3.88) adjungierten Systems gemäß Anhang B.4 entspricht. Beide sind hier skalar.

Es wird nun gezeigt, dass diese Abweichung für  $T \rightarrow \infty$  und jedes gegebene  $T_2 > 0$  divergieren wird und folglich keine Turnpike existieren

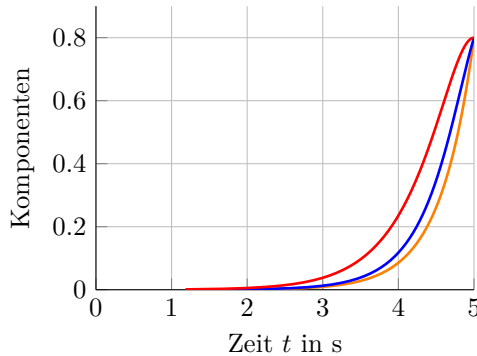
kann. Hierbei kann der Anfangswert  $x_T^*(T_1) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(T_1)$  näherungsweise vernachlässigt werden. Folglich gilt  $x_T^*(T_1) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(T_1) \approx 0$ . Dies bedarf lediglich,  $T_1$  hinreichend groß und  $T$  hinreichend groß gegenüber  $T_1$  zu wählen, beides gemäß der Ungleichung (3.107) für  $t = T_1$ . Es verbleibt, das Integral zu untersuchen. Hierzu wird zunächst nachgewiesen, dass die Komponenten des Koeffizienten von  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  positive untere Schranken besitzen, die für  $t \rightarrow T - T_2$  konstante Werte unabhängig von  $T$  annehmen. Zuerst ist es möglich zu zeigen, dass

$$1 \geq \Phi_T(T - T_2, t) \geq e^{(-1-P)(T-T_2-t)} = e^{-2,236(T-T_2-t)} \geq 0 \quad (\text{D.56})$$

für alle  $t \in [T_1, T - T_2]$  erfüllt ist.<sup>2)</sup> Die Transitionsmatrix strebt demnach gegen eins für  $t \rightarrow T - T_2$ . Auf gleiche Weise wie in der Herleitung der Ungleichung (D.56) in Fußnote 2) ist es möglich nachzuvollziehen, dass die Ungleichung

$$(P_T(t) - P) \mathbf{\Pi}_x^* + (\mathbf{\Pi}_T(t) - \mathbf{\Pi}_\infty) \geq [0, 8 \quad 0, 8] \cdot e^{-2,236(T-t)} \quad (\text{D.57})$$

komponentenweise immer erfüllt wird. Die Abbildung D.1 illustriert dies. Diese positive untere Schranke strebt somit für  $t \rightarrow T - T_2$  gegen den konstanten Wert  $[0, 8 \quad 0, 8] \cdot e^{-2,236T_2}$  unabhängig von  $T$ .



**Abbildung D.1:** Erste (—) und zweite (—) Komponente der linken Seite von (D.57) sowie die gemeinsame untere Schranke  $0,8 \cdot e^{-2,236(T-t)}$  (—) für  $T = 5$  s.

<sup>2)</sup> Es gilt  $\Phi_T(T - T_2, t)e^{(-1-P)(T-T_2-t)} = 1$  für  $t = T - T_2$ . Bekanntermaßen gilt  $P \geq P_T(t)$  für jedes  $T > 0$  sowie alle  $t \in [0, T]$  [6]. Damit lässt sich beweisen, dass  $\frac{d}{dt} \left( \Phi_T(T - T_2, t)e^{(-1-P)(T-T_2-t)} \right) \leq 0$  für alle  $t \in [T_1, T - T_2]$  erfüllt ist. Aus beidem folgt  $\Phi_T(T - T_2, t)e^{(-1-P)(T-T_2-t)} \geq 1$  für alle  $t \in [T_1, T - T_2]$ .

Für das vorliegende Beispiel hat man damit für jedes  $T > T_1 + T_2$  gezeigt, dass die Komponenten des Koeffizienten von  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  im Integral von (D.55) auf dem gesamten Intervall  $[T_1, T - T_2]$  positiv sind und untere Schranken besitzen, die zum Ende dieses Intervalls gegen konstante Werte unabhängig von  $T$  streben. Hingegen wird die erste Komponente von  $\bar{\mathbf{x}}(t)^\top = [10 + t \quad 1]$  für  $t \rightarrow T - T_2$  linear mit  $T$  wachsen. Als Folge divergiert der Fehler

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (x_T^*(T - T_2) - \mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(T - T_2)) = -\infty \quad (\text{D.58})$$

für jedes gegebene  $T_2 > 0$ , wie es auch das Simulationsergebnis links in Abbildung 3.4 aufzeigt. Damit ist belegt, dass  $\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(t)$  keine Turnpike ist und eine solche auch nicht existiert.

## D.6 Beweis zu Lemma 3.3

Es wird das folgende Lemma benötigt:

**Lemma D.1.** *Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq b$  ergeben sich die Grenzwerte:*

1.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T c dt = c.$
2.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(at) dt = 0.$
3.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(at) dt = 0.$
4.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(at)^2 dt = \frac{1}{2}.$
5.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(at)^2 dt = \frac{1}{2}.$
6.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(at) \sin(at) dt = 0.$
7.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(at) \cos(bt) dt = 0.$
8.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(at) \sin(bt) dt = 0.$
9.  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(at) \cos(bt) dt = 0.$

*Beweis.* Die Aussagen 1 bis 3 sind trivial. Die Aussagen 4 bis 9 folgen unmittelbar aus den Integralen 304., 265., 344., 336., 295. und 398. in [175, Kap. 0.7].  $\square$

Mithilfe der Integrations- und Grenzwertregeln aus Lemma D.1 wird das Integral des quadratischen Mittelwerts in eine Summe von Integralen zerlegt. Dabei bezieht sich jedes dieser Integrale nur auf eines der Teilsysteme des Exosystems und der Grenzwert kann dann jeweils mit den obigen Regeln berechnet werden. Auf dieser Basis erfolgt der

*Beweis zu Lemma 3.3.* Mit einer Matrix  $\mathbf{G}$ , die (3.157) erfüllt, und der Lösung  $\bar{\mathbf{x}}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}t}\bar{\mathbf{x}}_0$  des Exosystems (3.2a) zum Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  erhält man für den quadratischen Mittelwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_{0,T}(\cdot) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{G}^\top \mathbf{G} \bar{\mathbf{x}} dt = \bar{\mathbf{x}}_0^\top \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\bar{\mathbf{A}}^\top t} \mathbf{G}^\top \mathbf{G} e^{\bar{\mathbf{A}}t} dt \right) \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (\text{D.59})$$

Aus der blockdiagonalen Form von  $\bar{\mathbf{A}}$  in (3.150) und  $\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{0}$  nach (3.151) folgt

$$e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \text{diag} \left( \mathbf{I}_{\bar{n}_{\bar{\Omega}}(0)}, e^{\bar{\mathbf{A}}_1 t}, \dots, e^{\bar{\mathbf{A}}_{\bar{N}_{\bar{\Omega}}} t} \right). \quad (\text{D.60})$$

Zerlegt man die Spalten von  $\mathbf{G}$  entsprechend, dann ergibt sich

$$\mathbf{G} e^{\bar{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_c & \mathbf{G}_1 e^{\bar{\mathbf{A}}_1 t} & \dots & \mathbf{G}_{\bar{N}_{\bar{\Omega}}} e^{\bar{\mathbf{A}}_{\bar{N}_{\bar{\Omega}}} t} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.61})$$

Unter der Berücksichtigung dieser Zerlegung und der Transitionsmatrix

$$e^{\bar{\mathbf{A}}_j t} = \mathbf{I}_{\bar{n}_{\bar{\Omega}}(\omega_j)} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & \sin(\omega_j t) \\ -\sin(\omega_j t) & \cos(\omega_j t) \end{bmatrix} \quad (\text{D.62})$$

eines jeden harmonischen Teilsystems führt die Anwendung der Grenzwerte 1 bis 3 sowie 7 bis 9 aus Lemma D.1 auf

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_0^\top \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\bar{\mathbf{A}}^\top t} \mathbf{G}^\top \mathbf{G} e^{\bar{\mathbf{A}}t} dt \right) \bar{\mathbf{x}}_0 &= \bar{\mathbf{x}}_c(0)^\top \mathbf{G}_c^\top \mathbf{G}_c \bar{\mathbf{x}}_c(0) \\ &+ \sum_{j=1}^{\bar{N}_{\bar{\Omega}}} \bar{\mathbf{x}}_j(0)^\top \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\bar{\mathbf{A}}_j^\top t} \mathbf{G}_j^\top \mathbf{G}_j e^{\bar{\mathbf{A}}_j t} dt \right) \bar{\mathbf{x}}_j(0). \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$



Die Transitionsmatrix (D.62) wird mit den Rechenregeln zum Kronecker-Produkt aus Anhang A.1 umgeschrieben zu

$$\begin{aligned}
 e^{\overline{\mathbf{A}}_j t} &= \mathbf{I}_{\overline{n}_{\overline{\Omega}}(\omega_j)} \otimes \left( \cos(\omega_j t) \cdot \mathbf{I}_2 + \sin(\omega_j t) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \cos(\omega_j t) \cdot \mathbf{I}_{2\overline{n}_{\overline{\Omega}}(\omega_j)} + \sin(\omega_j t) \left( \mathbf{I}_{\overline{n}_{\overline{\Omega}}(\omega_j)} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{D.64}) \\
 &= \cos(\omega_j t) \cdot \mathbf{I}_{2\overline{n}_{\overline{\Omega}}(\omega_j)} + \sin(\omega_j t) \frac{1}{\omega_j} \overline{\mathbf{A}}_j.
 \end{aligned}$$

Ersetzt man dies in (D.63), so führt das Ausmultiplizieren und Anwenden der Regeln 4 bis 6 aus Lemma D.1 auf das Ergebnis (3.159).  $\square$

## E Statische Optimierungsprobleme zur Einhaltung vorgegebener Schranken durch den Folgefehler

Dieser Abschnitt bezieht sich auf die Bemerkung 3.16, S.123, und ist eine Ergänzung zu Abschnitt 3.6. Ziel ist es, mittels statischer Optimierungsmethoden ein stationäres Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  zu ermitteln, dass vorgegebene Schranken für den stationären Folgefehler unter der Annahme 3.3 beschränkter Soll- und Störgrößen einhält. Eine strikte Fehlerschranke  $\epsilon_i > 0$  für die  $i$ -te Komponente des stationären Folgefehlers,  $i = 1, \dots, p$ , fordert

$$|\mathbf{e}_i^\top (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{x}}(\cdot)| \leq \epsilon_i \quad (\text{E.1})$$

mit dem Einheitsvektor<sup>1)</sup>  $\mathbf{e}_i$ . In der Praxis sind auch Schranken für die Solltrajektorien und Störgrößen bekannt. D. h., der Zustand des Exosystems ist ein Element einer positiv invarianten Menge  $\overline{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^n$  und daher wird  $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \overline{\mathcal{X}}$  für  $t \geq 0$  erfüllt, vgl. [103, Kap. 4.2]. Auf Basis der speziellen Zustandsraumdarstellung in Abschnitt 3.6 werden durch  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \overline{\mathcal{X}}$  die maximalen Beträge  $\hat{B}_{c,i}^{\max}$  der konstanten, skalaren Zustände  $\bar{x}_{c,i}$  und die maximalen Amplituden  $\hat{A}_{j,i}^{\max}$  für die zweidimensionalen harmonischen Teilsysteme zur  $j$ -ten Kreisfrequenz  $\omega_j$  gemäß (3.152) festgelegt. Eine mögliche Konstruktion dieser invarianten Menge  $\overline{\mathcal{X}}$  präsentiert die Veröffentlichung [21, Abschn. II.B.].

Die stationären Fehlerschranken sind für alle Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \overline{\mathcal{X}}$  und jedes  $t \geq 0$  erfüllt, falls das Folgende gilt:

$$|\mathbf{e}_i^\top (\mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^* + \mathbf{D}_d - \overline{\mathbf{C}}) \mathbf{z}| \leq \epsilon_i, \quad \forall \mathbf{z} \in \overline{\mathcal{X}}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{E.2})$$

In Hinblick auf die Lösung des Problems OFP<sub>∞</sub>3.1 würde man intuitiv z. B. die Gewichtung  $\mathbf{Q}$  im Kostenfunktional (3.3) solange iterativ

<sup>1)</sup>Das  $i$ -te Element des Einheitsvektors  $\mathbf{e}_i$  ist gleich eins, alle anderen sind gleich null.

verändern, bis die Bedingung (E.2) durch das optimale stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  nach Korollar 3.1 eingehalten wird. Diese Idee wird nun analog zur Veröffentlichung [21] systematisiert. Dazu wird das statische Optimierungsproblem 3.1 unter anderem um die Bedingung (E.2) erweitert und  $\mathbf{Q}$  als weitere Optimierungsvariable aufgefasst:

### Statisches Optimierungsproblem E.1.

$$\underset{\mathbf{\Pi}_x^*, \mathbf{\Pi}_\phi, \mathbf{Q} \succ \mathbf{0}}{\operatorname{argmin}} \quad \operatorname{spur} \left( \mathbf{F}^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{F}^* \mathbf{S}^2 \right) \quad (\text{E.3})$$

$$\text{u. d. Nb.: (3.13), (E.2), } \mathbf{F}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi. \quad (\text{E.4})$$

Die Gütefunktion wurde ebenfalls angepasst: Auf Basis der Annahme, dass alle Anforderungen an den Folgefehler bereits durch die Bedingung (E.2) abgedeckt werden, wurde die Gewichtung des Folgefehlers in der Gütefunktion weggelassen. Man sucht damit ein stationäres Verhalten, das die Fehlerschranken (E.2) unter möglichst geringem Stellaufwand einhält. Außerdem wurde die Gewichtung der stationären Stellgröße mittels

$$\mathbf{S} = \operatorname{diag} \left( \hat{B}_1^{\max}, \dots, \hat{B}_L^{\max}, \hat{A}_{1,1}^{\max} \mathbf{I}_2, \dots, \hat{A}_{\frac{N}{N_\Omega}, \frac{N}{N_\Omega}}^{\max}(\omega_{\frac{N}{N_\Omega}}) \mathbf{I}_2 \right) \quad (\text{E.5})$$

skaliert, um die maximalen Beträge und Amplituden auch in der Gütefunktion zu berücksichtigen. Zusätzlich wurden  $\mathbf{F}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{\Pi}_\phi$  und die zweite Zeile der Sylvestergleichung (3.13) als Nebenbedingungen ergänzt. Dies ist notwendig, um zu garantieren, dass das gewonnene stationäre Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  auch optimal bezüglich des Problems  $\text{OFP}_\infty 3.1$  für die resultierende Gewichtung  $\mathbf{Q}$  ist. Der Grund hierfür ist, dass das Ergebnis von Satz 3.8 im Allgemeinen nicht erhalten bleibt, wenn zusätzliche Beschränkungen im statischen Optimierungsproblem 3.1 ergänzt werden.

Um das statische Optimierungsproblem E.1 zu lösen, kann mithilfe der  $\mathcal{S}$ -Prozedur und des *Schur-Komplements* aus [36, Kap. 2] zunächst die zulässige Menge, die durch die Bedingung (E.2) beschrieben wird, als Teilmenge einer durch lineare Ungleichungen und eine lineare Matrixungleichung definierten Menge abgeschätzt werden. Weiterhin fällt auf, dass die Nebenbedingung (3.13) einen bilinearen Term  $\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_x^*$  in den Variablen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{\Pi}_x^*$  aufweist. Es liegt daher ein Optimierungsproblem mit bilinearen Matrix(un)gleichungen vor. Solche Optimierungsprobleme sind im Allgemeinen nicht konvex und nicht effizient zu lösen [158]. In der Veröffentlichung [21] wird daher die Implementierung eines iterativen

Path-Following Algorithmus vorgestellt. Dabei wird die bilineare Matrixgleichung in jedem Schritt linearisiert. Dies führt dann auf ein Optimierungsproblem mit linearen Matrix(un)gleichungen, das auch als semidefinites Programm bezeichnet wird und nach [36, Abschn. 2.2.5] effizient gelöst werden kann. Die Idee des Path-Following geht auf [82, 131] zurück und wird z. B. auch in [162, Abschn. 5.4.3] erläutert und angewendet. In der Veröffentlichung [21] hat sich der Path-Following Algorithmus als vorteilhaft gegenüber einer numerischen Lösung mittels der gängigen Software PENLAB [61] erwiesen, da PENLAB nur für diagonale Gewichtungen  $\mathbf{Q}$  die Nebenbedingungen einhalten konnte.

Zusammengefasst führt das statische Optimierungsproblem E.1 auf ein optimales Folgeregelungsproblem  $\text{OFP}_{\infty} 3.1$  mit der Gewichtung  $\mathbf{Q}$ . Dessen optimales stationäres Verhalten  $(\Pi_x^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^* \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  hält die Fehlerschranke (3.16) ein und ist gleichzeitig möglichst effizient bezüglich des quadratischen Mittelwerts der stationären Stellenergie.<sup>2)</sup> Mit Blick auf das Kostenfunktional (3.3) ist garantiert, dass jedes andere stationäre Verhalten  $(\Pi_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  entweder eine „höhere“ stationäre Stellenergie oder eine „höhere“ Energie des mit dem gefundenen  $\mathbf{Q}$  gewichteten stationären Folgefehlers verursacht.<sup>3)</sup>

Es ist nicht sichergestellt, ob durch den Path-Following Algorithmus die optimale Lösung des statischen Optimierungsproblems E.1 oder wenigstens eine zufriedenstellende Näherung bestimmt werden kann. Daher erscheint es denkbar, auf die letztgenannten Aspekte zugunsten einer effizienten Lösbarkeit zu verzichten. Hierzu wird lediglich das statische Optimierungsproblem 3.1 um die Nebenbedingung (3.16) erweitert und die Gütefunktion wie im statischen Optimierungsproblem E.1 modifiziert:

### Statisches Optimierungsproblem E.2.

$$\underset{\Pi_x, \mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \quad \operatorname{spur} \left( \mathbf{F}^{\top} \mathbf{R} \mathbf{F} \mathbf{S}^2 \right) \quad (\text{E.6})$$

$$\text{u. d. Nb.: (3.145), (E.2).} \quad (\text{E.7})$$

Wie zuvor lässt sich dieses als ein semidefinites Programm reformulieren, indem die durch (E.2) definierte Menge wieder mittels der  $\mathcal{S}$ -Prozedur abgeschätzt wird. Nach der Anwendung des Schur-Komplements kann die Lösung des resultierenden semidefiniten Programms effizient bestimmt

<sup>2)</sup>Letzteres ist anhand der Gütefunktion  $\operatorname{spur}(\mathbf{F}^{*\top} \mathbf{R} \mathbf{F}^* \mathbf{S})$ , dem Beweis von Satz 3.8 und Lemma 3.3 nachzuvollziehen.

<sup>3)</sup>Dies ist im Sinne des divergenten Verhaltens (2.15a) in Definition 2.4 zu verstehen.

werden [36, 158]. Sie erfüllt alle Nebenbedingungen und gibt eine obere Schranke für die Gütefunktion.

Anhand der Ergebnisse aus der Veröffentlichung [85, Abschn. III.C.2)] ist nachzuvollziehen, dass eine Lösung des statischen Optimierungsproblems E.2 den Mittelwert der stationären Stellenergie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{R} \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}} \, dt, \quad (\text{E.8})$$

gemittelt über alle Anfangswerte  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \bar{\mathcal{X}}$ , minimiert. D. h., es wird im Allgemeinen zu jedem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  ein verschiedenes stationäres Verhalten  $(\mathbf{\Pi}_x \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}(\cdot))$  geben, das die Nebenbedingungen (E.1) einhält und eine „niedrigere“ stationäre Stellenergie benötigt.

# F Anhang zu Kapitel 4

## F.1 Ergänzung zu Abschnitt 4.4.1

Das folgende Lemma ist essentiell für die Beweisführungen zu den Hauptresultaten von Kapitel 4.

**Lemma F.1.** *Die Annahme 4.2, S. 150, sei erfüllt. Es sei eine Matrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n_G \times \bar{n}}$  mit  $n_G \geq 1$  und  $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$  gegeben, sodass das System  $(\mathbf{G}, \bar{\mathbf{A}})$  mit dem reellen Ausgang  $\bar{\mathbf{y}}_G(t) = \mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{n_G}$  und dem Zustand  $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{C}^{\bar{n}}$  nicht vollständig beobachtbar sei. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege das Exosystem (4.2a) in der Diagonalform*

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

mit den diagonalen, ggf. komplexen Matrizen  $\bar{\mathbf{A}}_{11}$  und  $\bar{\mathbf{A}}_{22}$  vor, sodass  $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{0}]$  gelte und das Teilsystem  $(\mathbf{G}_1, \bar{\mathbf{A}}_{11})$  vollständig beobachtbar ist.<sup>1)</sup> Für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_2(0)$  gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{y}_G^\top \mathbf{y}_G dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}^\text{H} \mathbf{G}^\text{H} \mathbf{G} \bar{\mathbf{x}} dt \begin{cases} > 0, \text{ falls } \bar{\mathbf{x}}_1(0) \neq \mathbf{0} \\ = 0, \text{ falls } \bar{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{F.2a})$$

$$= 0, \text{ falls } \bar{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{0}. \quad (\text{F.2b})$$

*Beweis.* Aus der Struktur von  $\bar{\mathbf{A}}$  und  $\mathbf{G}$  ergibt sich sofort

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{\mathbf{x}}(t)^\text{H} \mathbf{G}^\text{H} \mathbf{G} \bar{\mathbf{x}}(t) dt = \frac{1}{T} \bar{\mathbf{x}}_1(0)^\text{H} \underbrace{\left( \int_0^T e^{\bar{\mathbf{A}}_{11}^\text{H} t} \mathbf{G}_1^\text{H} \mathbf{G}_1 e^{\bar{\mathbf{A}}_{11} t} dt \right)}_{\mathbf{W}(0,T)} \bar{\mathbf{x}}_1(0), \quad (\text{F.3})$$

wobei  $\mathbf{W}(0,T) \in \mathbb{C}^{\bar{n} \times \bar{n}}$  die Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix des Teilsystems  $(\mathbf{G}_1, \bar{\mathbf{A}}_{11})$  ist. Trivialerweise schließt man auf den zweite Fall (F.2b).

<sup>1)</sup>Die Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  kann wegen Annahme 4.2 durch eine Zustandstransformation immer in eine Diagonalmatrix transformiert werden. Durch Sortierung der Eigenwerte auf deren Diagonalen wird die gewünschte Darstellung des Exosystems erreicht.

Da das Teilsystem  $(\mathbf{G}_1, \bar{\mathbf{A}}_{11})$  vollständig beobachtbar ist, gilt  $\mathbf{W}(0, T) \succ \mathbf{0}$  für jedes  $T > 0$  [150, Kap. 6.3].<sup>2)</sup> Der reelle Integrand in (F.2) erfüllt daher

$$\bar{\mathbf{x}}_1(t)^\top \mathbf{G}_1^\top \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(t) \neq \mathbf{0} \quad (\text{F.4})$$

für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_1(0) \neq \mathbf{0}$ . Unter der Berücksichtigung von Annahme 4.2 ist jede Komponente des reellen Ausgangs  $\mathbf{y}_G = \mathbf{G}\bar{\mathbf{x}}(t)$  eine Summe von Sinusoiden<sup>3)</sup> für jeden Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$ .<sup>4)</sup> Für jedes gegebene  $\bar{\mathbf{x}}_1(0) \neq \mathbf{0}$  lässt sich daher die linke Seite von (F.2) durch

$$\sum_i \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_j A_{ij} \cos(\omega_{ij}t + \beta_{ij}) \right)^2 dt \right) \quad (\text{F.5})$$

mit  $A_{ij}, \omega_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$  darstellen, sodass  $A_{ij} \neq 0$  wegen (F.4) gilt. Unter der Verwendung von Lemma D.1, S. 244, folgt daraus der erste Fall (F.2a).  $\square$

## F.2 Beweis zu Satz 4.1

Bevor der Beweis zum Satz 4.1 aus Abschnitt 4.4.2 präsentiert wird, werden einige benötigte Größen definiert. Hierzu sei zunächst an folgende Konsequenz aus den Bedingungen (4.30b) und (4.42) in Abschnitt 4.4.1 und Abschnitt 4.4.2 erinnert: Eine zulässige Lösung

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) = (\Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot), -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \Pi_\phi^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (\text{F.6})$$

und ein Kozustand  $\phi_s(\cdot) = \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ , die mittels der neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  bestimmt wurden, bilden eine Lösung des Hamiltonschen Systems

$$\dot{\phi}_s = -\mathbf{A}^\top \phi_s + \mathbf{C}^\top \mathbf{u}_s, \quad (\text{F.7a})$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s^* = \mathbf{A} \mathbf{x}_s^* - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top \phi_s + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{F.7b})$$

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{C} \mathbf{x}_s^* + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{F.7c})$$

zu dem Eingang  $\mathbf{u}_\phi(\cdot) = \mathbf{F}_\phi^u \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  und den Anfangswerten  $\mathbf{x}_s(0) = \Pi_x^u \bar{\mathbf{x}}_0$  sowie  $\phi_s(0) = \Pi_\phi^u \bar{\mathbf{x}}_0$ , sodass  $\mathbf{y}_s(t) - \bar{\mathbf{y}}(t) \equiv \mathbf{0}$  zutrifft.

Aus (F.7) ist zu erkennen, dass das Hamiltonsche System eine „Reihenschaltung“ der Kozustandsdynamik (F.7a) und der Systemdynamik (F.7b)

<sup>2)</sup>Die Matrix  $\mathbf{W}(0, T)$  ist hermitesch, da sie  $\mathbf{W}(0, T)^H = \mathbf{W}(0, T)$  erfüllt. Alle ihre Eigenwert sind daher reell und wegen  $\mathbf{W}(0, T) \succ \mathbf{0}$  auch größer als null.

<sup>3)</sup>Ein Sinusoid ist durch  $\hat{A} \sin(\omega t + \beta) + C$  mit  $\hat{A}, \omega, \beta, C \in \mathbb{R}$  definiert.

<sup>4)</sup>Diesbezüglich sei auch auf die Ausführungen im Abschnitt 3.6 verwiesen.

bildet. Auf dieser Basis wird nun eine geeignete Form der Rosenbrockschen Systemmatrix<sup>5)</sup> des Hamiltonschen Systems hergeleitet. Hierzu ist die Systemmatrix des Systems  $(C, A, B)$  aus (4.1) wie in Anhang B.3 durch

$$\mathcal{R}_s(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.8})$$

mit  $s \in \mathbb{C}$  definiert. Außerdem wird für den Kozustand  $\phi_s(\cdot)$  das System  $(-B^\top, -A^\top, C^\top)$  bestehend aus der Dynamik (F.7a) und dem künstlichen Ausgang  $-B^\top \phi_s$  definiert. Dessen Systemmatrix lautet nach einer einfachen Umformung

$$\mathcal{R}_\phi(s) := \begin{bmatrix} -sI - A^\top & C^\top \\ -B^\top & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

Legt man die oben beschriebene Reihenschaltung des Hamiltonschen Systems (F.7) zugrunde und nutzt die beiden Systemmatrizen  $\mathcal{R}_s(s)$  und  $\mathcal{R}_\phi(s)$ , so erhält man die Systemmatrix

$$\mathcal{R}_H^u(s) := \begin{bmatrix} 0 & -sI - A^\top & C^\top \\ sI - A & BR^{-1}B^\top & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.10})$$

Die Systemmatrix  $\mathcal{R}_H^u(s)$  kann auch aus der üblichen Definition aus Anhang B.3 und einfachen Umformungen gewonnen werden. Diese Reihendarstellung erweist sich als günstig im folgenden Beweis.

Der Hauptteil des Beweises befasst sich mit dem Nachweis, dass die Lösbarkeit der klassischen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG})$  in (4.5) die Lösbarkeit der neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  in (4.47) impliziert. Hierzu wird eine notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung für die linearen Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  angegeben. Dann wird gezeigt, dass diese Bedingung auch hinreichend für die Lösbarkeit der neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  ist.

*Beweis zu Satz 4.1.* Es sei  $(\Pi_x^u, \Pi_\phi^u, \Gamma_\phi^u)$  ein Tripel, das die Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  löst. Aus diesem konstruiert man das Paar  $(\Pi_x^u, -R^{-1}B^\top \Pi_\phi^u)$ , das wegen (4.47b) und (4.47c) offensichtlich die Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  erfüllt, weshalb die Lösbarkeit der klassischen Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  notwendig ist.

Es verbleibt der Nachweis, dass die Lösbarkeit der klassischen Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  auch ein hinreichendes Kriterium zur Lösbarkeit der neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  ist. Hierzu werden die linearen Gleichungssysteme  $(\mathcal{RG})$

<sup>5)</sup>Siehe Anhang B.3 für eine Definition.



und  $(\mathcal{RG}^u)$  mithilfe der zuvor angegebene Systemmatrizen umformuliert. Auf Basis der Annahme 4.2 liege die Matrix  $\overline{\mathbf{A}}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Diagonalmatrix vor. Dann ist es möglich, die Matrizen-  
gleichungen  $(\mathcal{RG})$  spaltenweise zu lösen:

$$\mathbf{\Pi}_{x,i} \overline{\lambda}_i = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_{x,i} + \mathbf{B} \mathbf{F}_i + \mathbf{E}_{d,i}, \quad (\text{F.11a})$$

$$\overline{\mathbf{C}}_i = \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_{x,i} + \mathbf{D}_{d,i}, \quad (\text{F.11b})$$

wobei  $\overline{\lambda}_i$  der  $i$ -te Eigenwert auf der Diagonalen von  $\overline{\mathbf{A}}$  ist und  $\mathbf{\Pi}_{x,i}$ ,  $\mathbf{F}_i$ ,  $\mathbf{E}_{d,i}$ ,  $\overline{\mathbf{C}}_i$ ,  $\mathbf{D}_{d,i}$  sind die  $i$ -ten Spalten von  $\mathbf{\Pi}_x$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{E}_d$ ,  $\overline{\mathbf{C}}$  und  $\mathbf{D}_d$ . Man erhält so ein System von  $i = 1, \dots, \bar{n}$  Gleichungen (F.11). Es ist beispielsweise aus [89, Beweis von Theorem 1.9] bekannt, dass dieses System und damit die Gleichungen  $(\mathcal{RG})$  äquivalent zu den  $i = 1, \dots, \bar{n}$  Gleichungen

$$\beta_i = \mathcal{R}_s(\overline{\lambda}_i) \mathbf{z}_{s,i} \quad (\text{F.12})$$

zum  $i$ -ten Eigenwert  $\overline{\lambda}_i \in \sigma(\overline{\mathbf{A}})$  mit der Variablen

$$\mathbf{z}_{s,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{x,i} \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+m} \quad (\text{F.13})$$

und der linken Seite

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{d,i} \\ \overline{\mathbf{C}}_i - \mathbf{D}_{d,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+p} \quad (\text{F.14})$$

sind. Hierzu völlig analog sind die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^u)$  äquivalent zu den  $i = 1, \dots, \bar{n}$  Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \beta_i \end{bmatrix} = \mathcal{R}_H^u(\overline{\lambda}_i) \mathbf{z}_{H,i} \quad (\text{F.15})$$

zum  $i$ -ten Eigenwert  $\overline{\lambda}_i \in \sigma(\overline{\mathbf{A}})$  mit der Variablen

$$\mathbf{z}_{H,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{x,i}^u \\ \mathbf{\Pi}_{\phi,i}^u \\ \mathbf{F}_{\phi,i}^u \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n+p}. \quad (\text{F.16})$$

Für den Beweis genügt es, für jeden Eigenwert  $\overline{\lambda}_i \in \sigma(\overline{\mathbf{A}})$  zu zeigen, dass für jedes beliebige  $\beta_i \in \mathbb{C}^{n+p}$ , für das die Gleichung (F.12) eine Lösung hat, auch die Gleichung (F.15) eine Lösung besitzt. In der Folge wird auf die Angabe des Indexes  $i$  verzichtet.

Aus [30, Fakt 2.10.6] ist bekannt, dass  $\beta = \mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) z_s$  dann und nur dann eine Lösung hat, wenn die Bedingung

$$\nu_s^H \beta = 0 \quad (\text{F.17})$$

für alle Vektoren  $\nu_s$  im Linksnulldraum der Matrix  $\mathcal{R}_s(\bar{\lambda})$  erfüllt ist. Für alle diese Vektoren gilt:

$$\nu_s \in \text{lnull}(\mathcal{R}_s(\bar{\lambda})) = \{\nu \in \mathbb{C}^{n+p} \mid 0 = \nu^H \mathcal{R}_s(\bar{\lambda})\}. \quad (\text{F.18})$$

Es sei nun die folgende Menge eingeführt:

$$\mathcal{S}_{\bar{\lambda}} = \left\{ \hat{\nu} := \begin{bmatrix} \nu_\phi \\ \nu_s \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n+p} \mid \nu_s \in \text{lnull}(\mathcal{R}_s(\bar{\lambda})) \right\}. \quad (\text{F.19})$$

Angenommen, der Linksnulldraum der Matrix  $\mathcal{R}_H^u(\bar{\lambda})$  in der Gleichung (F.15) sei eine Teilmenge der Menge  $\mathcal{S}_{\bar{\lambda}}$ . Es gilt daher

$$\text{lnull}(\mathcal{R}_H^u(\bar{\lambda})) \subseteq \mathcal{S}_{\bar{\lambda}}. \quad (\text{F.20})$$

Wenn nun das Gleichungssystem (F.12) eine Lösung hat, dann ist die Bedingung (F.17) für alle  $\nu_s$  gemäß (F.18) erfüllt und es resultiert

$$\hat{\nu}^H \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_\phi \\ \nu_s \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \nu_s^H \beta = 0, \quad \forall \hat{\nu} \in \mathcal{S}_{\bar{\lambda}}. \quad (\text{F.21})$$

Per Annahme (F.20) gilt (F.21) auch für alle  $\hat{\nu} \in \text{lnull}(\mathcal{R}_H^u(\bar{\lambda}))$ , was wiederum durch [30, Fakt 2.10.6] impliziert, dass die Gleichung (F.15) ebenfalls eine Lösung hat.

Um den Beweis zu vervollständigen, muss nur noch gezeigt werden, dass die vorausgesetzte Annahme (F.20) für alle Eigenwerte  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  zutrifft. Man nutzt die Unterteilung

$$\hat{\nu}^H = [\nu_\phi^H \quad \nu_{s1}^H \quad \nu_{s2}^H]. \quad (\text{F.22})$$

Die Annahme (F.20) ist für jedes  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  erfüllt, falls für jeden Vektor  $\hat{\nu}$ , der die Gleichung  $\hat{\nu}^H \mathcal{R}_H^u(\bar{\lambda}) = 0$  zu einem beliebigen  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  löst, auch die Bedingung

$$[\nu_{s1}^H \quad \nu_{s2}^H] \mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) = 0 \quad (\text{F.23})$$

gilt. Aus der Reihenschaltung der Kozustandsdynamik und der Systemdynamik im Hamiltonschen System (F.7) folgt, dass  $\hat{\nu}^H \mathcal{R}_H^u(\bar{\lambda}) = \mathbf{0}$  äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} \nu_\phi^H & \tilde{\nu}_{s1}^H \end{bmatrix} \mathcal{R}_\phi(\bar{\lambda}) = \mathbf{0}, \quad (\text{F.24a})$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{s1}^H & \nu_{s2}^H \end{bmatrix} \mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\nu}_{s1}^H R \end{bmatrix} \quad (\text{F.24b})$$

ist, wobei der Vektor  $\tilde{\nu}_{s1}^H = -\nu_{s1}^H B R^{-1}$  mit  $\tilde{\nu}_{s1} \in \mathbb{C}^m$  substituiert wurde. Mittels (F.8) und (F.9) ist nachzuvollziehen, dass für alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{A})$

$$\mathcal{R}_\phi(\bar{\lambda}) = \mathcal{R}_s(\bar{\lambda})^H \quad (\text{F.25})$$

zutrifft, da  $\bar{\lambda}^H = -\bar{\lambda}$  wegen  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{A}) \in j\mathbb{R}$  aufgrund der Annahme 4.2 gilt. Daraus folgt, dass (F.24a) nach komplexer Konjugation gleichbedeutend ist zu

$$\mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) \begin{bmatrix} \nu_\phi \\ \tilde{\nu}_{s1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{F.26})$$

Multipliziert man in (F.24b) mit dem Vektor aus (F.26) von rechts, so führt dies wegen (F.26) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\nu}_{s1}^H R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_\phi \\ \tilde{\nu}_{s1} \end{bmatrix} = \tilde{\nu}_{s1}^H R \tilde{\nu}_{s1} = \mathbf{0}. \quad (\text{F.27})$$

Aus  $R \succ \mathbf{0}$  folgert man  $\tilde{\nu}_{s1} = \mathbf{0}$ , wodurch (F.24b) die verlangte Bedingung (F.23) impliziert.  $\square$

### F.3 Beweis zu Satz 4.3

Das Vorgehen orientiert sich am Beweis von Satz 4.1 im Anhang F.2. Aus der Herleitung in Abschnitt 4.4.1 folgt für  $\rho = 1$  und  $\mu = 0$ , dass eine zulässige Lösung

$$(\mathbf{x}_s^*(\cdot), \mathbf{u}_s^*(\cdot)) = (\Pi_x^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot), \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot)) \quad (\text{F.28})$$

und ein Kozustand  $\phi_s(\cdot) = \Pi_\phi \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ , die mit den neuen Gleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  berechnet wurden, eine Lösung des Hamiltonschen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}_s^* = \mathbf{A} \mathbf{x}_s^* + \mathbf{B} \mathbf{u}_s^* + \mathbf{E}_d \bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{F.29a})$$

$$\dot{\phi}_s = -\mathbf{A}^\top \phi_s - \mathbf{C}^\top Q(\mathbf{C} \mathbf{x}_s^* + \mathbf{D}_d \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}), \quad (\text{F.29b})$$

$$\mathbf{y}_\phi = -\mathbf{B}^\top \phi_s \quad (\text{F.29c})$$

mit dem künstlichen Ausgang  $\mathbf{y}_\phi$  zu der Stellgröße  $\mathbf{u}_s^*(\cdot) = \mathbf{F}^y \bar{\mathbf{x}}(\cdot)$  und den Anfangswerten  $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{\Pi}_x^y \bar{\mathbf{x}}_0$  sowie  $\phi_s(0) = \mathbf{\Pi}_\phi \bar{\mathbf{x}}_0$  ist. Wie in Abschnitt 4.4.1 ist auch hier das Hamiltonsche System eine Reihenschaltung der Systemdynamik (F.29a) und der Kozustandsdynamik (F.29b), jedoch in umgekehrter Reihenfolge. Anhand der Systemmatrizen  $\mathcal{R}_s(s)$  in (F.8) und  $\mathcal{R}_\phi(s)$  in (F.9) ist es daher nachzuvollziehen, dass man die Rosenbrocksche Systemmatrix des Hamiltonschen Systems in der Darstellung

$$\mathcal{R}_H^y(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -s\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top & -\mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{F.30})$$

angeben kann. Diese Darstellung kann auch mittels einfacher Umformungen aus der üblichen Definition aus Anhang B.3 bestimmt werden.

*Beweis zu Satz 4.3.* Wie im Beweis von Satz 4.1 in Anhang F.2 ist es auch hier möglich, die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  als ein System linearer Gleichungen in Abhängigkeit von der Systemmatrix  $\mathcal{R}_H^y(s)$  umzuformulieren. Hierzu ist lediglich wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass die Systemmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  als Diagonalmatrix vorliegt.

Nachzuweisen, dass die neuen Regulatorgleichungen  $(\mathcal{RG}^y)$  unter den Annahmen 4.1, 4.2 und 4.4 immer eine eindeutige Lösung haben, ist daher äquivalent dazu, nachzuweisen, dass eine eindeutige Lösung  $\mathbf{z}_H \in \mathbb{C}^{2n+m}$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \beta_s \\ \mathbf{C}^\top \mathbf{Q} \beta_\phi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathcal{R}_H^y(\bar{\lambda}) \mathbf{z}_H \quad (\text{F.31})$$

für jeden Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  sowie für alle beliebigen Vektoren  $\beta_s \in \mathbb{C}^n$  und  $\beta_\phi \in \mathbb{C}^p$  existiert. Eine eindeutige Lösung von (F.31) existiert dann und nur dann, wenn die quadratische Systemmatrix  $\mathcal{R}_H^y(\bar{\lambda})$  vollen Spaltenrang für jeden Eigenwert  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  aufweist. D. h., dass die Gleichung

$$\mathcal{R}_H^y(\bar{\lambda}) \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (\text{F.32})$$

mit  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^{2n+m}$  nur die triviale Lösung  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$  besitzt. Dies wird nun bewiesen. Hierzu führt man die Unterteilung

$$\hat{\mathbf{v}}^\top = [\boldsymbol{\nu}_s^\top \quad \boldsymbol{\nu}_{\phi 1}^\top \quad \boldsymbol{\nu}_{\phi 2}^\top] \quad (\text{F.33})$$

ein. Aufgrund der Reihenschaltung der Systemdynamik und der Kozustandsdynamik im Hamiltonschen System (F.29) ist (F.32) äquivalent zu

$$\mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) \begin{bmatrix} \nu_{\phi 1} \\ \nu_{\phi 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^{-1} \tilde{\nu}_{\phi 1} \end{bmatrix}, \quad (\text{F.34a})$$

$$\mathcal{R}_\phi(\bar{\lambda}) \begin{bmatrix} \nu_s \\ \tilde{\nu}_{\phi 1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{F.34b})$$

wobei eine Hilfsvariable  $\tilde{\nu}_{\phi 1} \in \mathbb{C}^p$  in (F.34a) eingeführt wurde, die den Term  $\tilde{\nu}_{\phi 1} = -\mathbf{Q}\mathbf{C}\nu_{\phi 1}$  substituiert. Aus (F.25) ist bekannt, dass  $\mathcal{R}_\phi(\bar{\lambda})^H = \mathcal{R}_s(\bar{\lambda})$  für jedes  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  unter der Annahme 4.2 zutrifft. Damit impliziert (F.34b)

$$\begin{bmatrix} \nu_s^H & \tilde{\nu}_{\phi 1}^H \end{bmatrix} \mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) = \mathbf{0}. \quad (\text{F.35})$$

Multipliziert man (F.34a) von links mit dem Vektor aus (F.35), so führt dies zu

$$\begin{bmatrix} \nu_s^H & \tilde{\nu}_{\phi 1}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^{-1} \tilde{\nu}_{\phi 1} \end{bmatrix} = -\tilde{\nu}_{\phi 1}^H \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\nu}_{\phi 1} = \mathbf{0}, \quad (\text{F.36})$$

was  $\tilde{\nu}_{\phi 1} = \mathbf{0}$  verlangt. Damit (F.34) und daher auch (F.32) von  $\hat{\nu}$  erfüllt werden, muss aufgrund von  $\tilde{\nu}_{\phi 1} = \mathbf{0}$  notwendigerweise

$$\mathcal{R}_s(\bar{\lambda}) \begin{bmatrix} \nu_{\phi 1} \\ \nu_{\phi 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{\phi 1} \\ \nu_{\phi 2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{F.37a})$$

$$-\mathcal{R}_\phi(\bar{\lambda}) \begin{bmatrix} \nu_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A}^\top \\ -\mathbf{B}^\top \end{bmatrix} \nu_s = \mathbf{0} \quad (\text{F.37b})$$

gelten. Bekanntlich trifft  $-\bar{\lambda} \in j\mathbb{R}$  für jedes  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}}) \subset j\mathbb{R}$  wegen der Annahme 4.2 zu. Durch die Annahme 4.1 zur Stabilisierbarkeit hat die Matrix in (F.37b) daher einen vollen Spaltenrang, was  $\nu_s = \mathbf{0}$  erzwingt. Hierzu sei auf Gl. (B.1) in Anhang B.1 verwiesen. Offensichtlich hat (F.37a) genau dann ausschließlich die triviale Lösung  $\nu_{\phi 1} = \mathbf{0}$  und  $\nu_{\phi 2} = \mathbf{0}$  für jedes  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$ , wenn  $\mathcal{R}_s(\bar{\lambda})$  einen vollen Spaltenrang für alle  $\bar{\lambda} \in \sigma(\bar{\mathbf{A}})$  hat. Dies ist garantiert, da die Nicht-Resonanz-Bedingung in Annahme 4.4 zutrifft. Damit ist gezeigt, dass (F.32) nur von  $\hat{\nu} = \mathbf{0}$  erfüllt wird.  $\square$

## F.4 Ergänzung zu Abschnitt 4.4.4

Das hier präsentierte Lemma ist eine Konsequenz von Standardresultaten aus [30, 88].

**Lemma F.2.** *Es seien  $n\bar{n} \geq 1$  Gleichungen durch das lineare Gleichungssystem*

$$\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{X}\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{B} \quad (\text{F.38})$$

*in der Matrixvariablen  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  mit  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$  und  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  gegeben. Weiterhin liege in Abhängigkeit von  $\epsilon > 0$  das gestörte lineare Gleichungssystem*

$$(\mathcal{A} + \epsilon\Delta)\tilde{\mathcal{X}} + \tilde{\mathcal{X}}(\bar{\mathcal{A}} + \epsilon\bar{\Delta}) = \mathcal{B} \quad (\text{F.39})$$

*mit  $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\bar{\Delta} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$  vor. Es sei angenommen, dass  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  und  $\tilde{\mathcal{X}}(\epsilon): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times \bar{n}}$  die jeweiligen, eindeutigen Lösungen für jedes  $\epsilon > 0$  sind. Die Frobeniusnorm des Fehlers ist für  $\epsilon \rightarrow 0$  von der Ordnung*

$$\|\tilde{\mathcal{X}}(\epsilon) - \mathcal{X}\|_{\text{F}} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{F.40})$$

*und nach Definition A.4, S. 216, wächst der Fehler  $\|\tilde{\mathcal{X}}(\epsilon) - \mathcal{X}\|_{\text{F}}$  der Lösung  $\tilde{\mathcal{X}}$  des gestörten Gleichungssystems in einer Umgebung von  $\epsilon = 0$  höchstens linear mit  $\epsilon$  an. Daraus folgt der Grenzwert*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\tilde{\mathcal{X}}(\epsilon) - \mathcal{X}\|_{\text{F}} = 0. \quad (\text{F.41})$$

*Beweis.* Wie es aus dem Anhang A.1, S. 216, bekannt ist, können die beiden Gleichungssysteme mithilfe der Kronecker-Summe  $\oplus$  und des Vektorisierung-Operators  $\text{vec}(\cdot)$  äquivalent durch

$$(\bar{\mathcal{A}}^{\text{T}} \oplus \mathcal{A})\text{vec}(\mathcal{X}) = \text{vec}(\mathcal{B}) \quad (\text{F.42a})$$

$$\left( (\bar{\mathcal{A}}^{\text{T}} \oplus \mathcal{A}) + \epsilon(\bar{\Delta}^{\text{T}} \oplus \Delta) \right) \text{vec}(\tilde{\mathcal{X}}) = \text{vec}(\mathcal{B}) \quad (\text{F.42b})$$

ausgedrückt werden.<sup>6)</sup> Dadurch liegen die Gleichungssysteme in der gewöhnlichen Darstellung von linearen Gleichungssystemen vor. Da deren Lösung per Annahme eindeutig ist, muss  $\bar{\mathcal{A}}^{\text{T}} \oplus \mathcal{A}$  invertierbar sein.

<sup>6)</sup>Bei (F.42b) wurden die Regeln (A.6a) sowie  $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{C} + \mathcal{D}) = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}) + (\mathcal{B} \oplus \mathcal{D})$  verwendet. Letzteres folgt aus der Definition der Kronecker-Summe, die (A.7) entnommen werden kann, und der Regel (A.6b).

Daher kann das Resultat aus [30, Fakt 9.15.2] angewendet werden, das in [88, Kap. 5.8] auch hergeleitet wird. Aus diesem folgt: Falls

$$\epsilon < \frac{1}{\|(\overline{\mathcal{A}}^\top \oplus \mathcal{A})^{-1}(\overline{\Delta}^\top \oplus \Delta)\|_2} \quad (\text{F.43})$$

zutrifft, dann gilt

$$\|\text{vec}(\tilde{\mathcal{X}}(\epsilon) - \mathcal{X})\|_2 \leq \epsilon \frac{\|(\overline{\mathcal{A}}^\top \oplus \mathcal{A})^{-1}\|_2 \|\overline{\Delta}^\top \oplus \Delta\|_2 \|\text{vec}(\mathcal{X})\|_2}{1 - \epsilon \|(\overline{\mathcal{A}}^\top \oplus \mathcal{A})^{-1}(\overline{\Delta}^\top \oplus \Delta)\|_2}. \quad (\text{F.44})$$

Berücksichtigt man den Zusammenhang  $\|\cdot\|_F = \|\text{vec}(\cdot)\|_2$ , so ist ersichtlich, dass der Fehler  $\|\tilde{\mathcal{X}}(\epsilon) - \mathcal{X}\|_F$  von der Ordnung groß  $\mathcal{O}$  von  $\epsilon$  für hinreichend kleine  $\epsilon$  ist. Hieraus folgt unmittelbar die Konvergenz in (F.41).  $\square$

# G Simulationsbeispiele

Die Matrizen zu den Beispielsystemen und den Reglern werden angegeben.

## G.1 Helikopter

### G.1.1 Modell aus [132, S. 279]

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{bmatrix} -0,0243 & 0,0392 & -0,6705 & -9,8014 & -0,0041 \\ -0,0467 & -0,7285 & 30,864 & -0,42 & -0,0186 \\ 0,028 & 0,0248 & -2,2156 & 0 & 0,0159 \\ 0 & 0 & 0,9995 & 0 & 0 \\ 0,0035 & 0,0159 & -0,1293 & 0,0133 & -0,1228 \\ -0,0437 & 0,2611 & -2,0532 & 0 & -0,1713 \\ 0 & 0 & -0,0014 & 0 & 0 \\ -0,0273 & 0,0109 & -0,1661 & 0 & 0,0529 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} -0,119 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3216 & 0,3117 & 0 & 0 \\ 0,4108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0318 & 0 \\ 0,6465 & 9,7964 & -30,5334 & 0 \\ -10,6565 & 0 & -0,2069 & 0 \\ 1 & 0 & 0,0429 & 0 \\ -1,8568 & 0 & -0,9039 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (G.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B = & \begin{bmatrix} 4,6289 & -8,056 & 2,0386 & 0 \\ -107,3896 & -21,2288 & 0 & 0 \\ 10,7004 & 27,6889 & -5,8115 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,4472 & -1,6712 & -9,3018 & 3,7509 \\ 31,4636 & -27,4424 & -153,3177 & -0,7505 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14,5826 & -5,9178 & -27,0369 & -10,1087 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (G.2)
 \end{aligned}$$



## G.1.2 Reglermatrizen zu Kapitel 3

### Beschränkte Solltrajektorien

$$K^* = \begin{bmatrix} -0,0111 & -0,0093 & 0,0089 & 0,2018 & -0,034 \\ -0,0227 & 0,0091 & 0,1401 & 0,3078 & 0,0059 \\ 0,0107 & -0,0038 & -0,0475 & -0,1437 & 0,0127 \\ -0,0064 & -0,0043 & -0,0076 & 0,1562 & 0,0391 \\ & -0,0378 & -0,1012 & 0,2424 & -0,0168 \\ & 0,0048 & -0,0146 & -0,0262 & -0,0447 \\ & -0,014 & -0,0724 & -0,0032 & -0,1056 \\ & 0,0532 & 0,1345 & -0,3172 & 0,0166 \end{bmatrix} \quad (G.3)$$

$$\Pi_x^* = \begin{bmatrix} 0,9973 & 0,0054 & 0,0082 & -0,0172 & -0,0104 & -0,1228 \\ -0,1324 & 0,5475 & -0,0748 & -1,1162 & 1,7248 & 1,2685 \\ 0 & 0 & -0,0004 & -0,0067 & 0,0037 & 0,1018 \\ -0,0017 & -0,0005 & -0,0021 & 0,0019 & 0,1017 & -0,0037 \\ 0,0013 & 0,9934 & -0,0014 & 0,0133 & 0,0054 & -0,0025 \\ 0 & 0 & -0,1236 & -0,0054 & 0,0008 & 0,0029 \\ -0,0003 & 0,0101 & 0,0153 & 0,6182 & 0,0027 & -0,0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1972 & 0,0003 & -0,0003 \\ 0 & 0 & 0,9862 & 0 & -0,0003 & -0,0003 \end{bmatrix} \quad (G.4)$$

$$F^* = \begin{bmatrix} 0,0007 & -0,0039 & -0,0021 & 0,0081 & 0,0017 & 0,0035 \\ -0,0012 & 0,0002 & 0,0042 & -0,0025 & -0,0047 & 0,0059 \\ -0,0001 & -0,001 & 0,0073 & 0,0006 & 0,0041 & 0,0003 \\ -0,0007 & 0,0028 & 0,0016 & -0,0061 & -0,004 & 0,0003 \end{bmatrix} \quad (G.5)$$

### Unbeschränkte Solltrajektorien

$$K^* = \begin{bmatrix} 160,8841 & -0,016 & 3,167 & 4,1811 & -1,4107 \\ -5,9242 & -0,0086 & 1,0647 & 2,1715 & -0,1312 \\ 2,6631 & -0,0002 & -0,0709 & -0,3938 & 0,2344 \\ 1,8875 & 0,0044 & 0,3519 & -0,1944 & 0,4484 \\ & -0,121 & -0,6475 & 2,3599 & 0,4268 \\ & -0,046 & -0,2248 & 0,3137 & -0,0249 \\ & -0,1097 & -0,403 & -0,3914 & -0,4898 \\ & 0,1765 & 0,6929 & -1,2706 & 0,2495 \end{bmatrix} \quad (G.6)$$

$$\mathbf{\Pi}_x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,0005 & 0 & 0 \\ -0,0015 & -0,0379 & 0,3916 & 0,0106 & -0,0132 \\ 0 & -0,0018 & -0,1019 & -0,0099 & -0,0005 \\ -0,0018 & -0,1018 & -0,0099 & -0,0005 & 0,0002 \\ 0,0006 & 0,0008 & -0,0038 & -0,0009 & 0,0005 \\ 0 & 0,0002 & -0,0001 & 0,0112 & -0,0016 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0112 & -0,0016 & 0,0006 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0005 & 0,0002 \\ 0 & 0 & -0,0005 & 0,0002 & -0,0002 \end{bmatrix} \quad (\text{G.7})$$

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} -0,0002 & 0,0002 & -0,0321 & -0,0061 & -0,0001 \\ -0,001 & -0,0002 & 0,0028 & -0,0026 & -0,0003 \\ -0,0002 & 0 & -0,0049 & -0,0014 & 0,0001 \\ -0,0021 & 0,0003 & -0,0327 & -0,0054 & 0,0002 \end{bmatrix} \quad (\text{G.8})$$

$$\mathbf{\Pi}_x^{\text{OP}} = \begin{bmatrix} 0,9995 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3989 & -0,0868 & -0,0024 & 0,0035 & 0,0006 \\ 0 & -0,0015 & -0,0986 & -0,0089 & 0,0027 \\ -0,0015 & -0,0985 & -0,0089 & 0,0027 & 0,0005 \\ 0,0119 & 0,0009 & 0,0071 & 0,0002 & -0,0003 \\ 0 & -0,0012 & 0,0008 & 0,0088 & 0 \\ -0,0012 & 0,0009 & 0,0088 & 0 & -0,0004 \\ 0 & 0,0003 & -0,0002 & 0 & 0 \\ 0,0003 & -0,0002 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

$$\mathbf{F}^{\text{OP}} = \begin{bmatrix} 0,0026 & 0,0046 & -0,0278 & -0,0018 & 0,0008 \\ -0,0017 & -0,0016 & 0,0018 & -0,0037 & -0,0004 \\ -0,0001 & 0,0011 & -0,0046 & -0,0002 & 0,0001 \\ 0,0021 & 0,0046 & -0,0273 & -0,0014 & 0,001 \end{bmatrix} \quad (\text{G.10})$$

### G.1.3 Reglermatrizen zu Kapitel 4

$$\mathbf{\Pi}_x^u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1335 & 0,5519 & -0,0762 & -1,1391 & 1,9775 & 1,4088 \\ 0 & 0 & -0,0004 & -0,0067 & 0,0059 & 0,1158 \\ -0,0017 & -0,0005 & -0,0018 & 0,0021 & 0,1158 & -0,0059 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1254 & -0,0054 & 0,0001 & 0,0018 \\ -0,0003 & 0,0102 & 0,0158 & 0,6268 & 0,0017 & -0,0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.11})$$

$$\mathbf{F}^u = \begin{bmatrix} 0,0007 & -0,0039 & -0,0021 & 0,0083 & 0,002 & 0,004 \\ -0,0012 & 0,0002 & 0,0043 & -0,0025 & -0,0053 & 0,0067 \\ -0,0001 & -0,001 & 0,0074 & 0,0006 & 0,0047 & 0,0003 \\ -0,0007 & 0,0028 & 0,0016 & -0,0062 & -0,0045 & 0,0002 \end{bmatrix} \quad (\text{G.12})$$

## G.2 Drei-Massen-Schwinger

### G.2.1 Modell

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m_1} & -\frac{d_1+d_2}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{d_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{d_1}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} & -\frac{2d_1}{m_2} & \frac{k}{m_2} & \frac{d_1}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_3} & \frac{d_1}{m_3} & -\frac{2k}{m_3} & -\frac{d_1+d_2}{m_3} \end{bmatrix} \quad (G.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{bmatrix}^T \quad (G.14)$$

**Tabelle G.1:** Modellparameter

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$d_1$	$d_2$	$k$
2 kg	2 kg	2 kg	0,1 $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	1 $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	1 $\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$

### G.2.2 Reglermatrizen zu Kapitel 3

$$K^* = \begin{bmatrix} 5,22 & 1,01 & 75,57 & 132,2 & 55,29 & 14,64 \\ 126,59 & 21,64 & 38,42 & 52,72 & 4,91 & 1,01 \end{bmatrix} \quad (G.15)$$

$$\Pi_x^* = \begin{bmatrix} 0,9098 & -0,0897 & 0,9018 & 0 & -0,0052 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4509 & 0 & -0,0162 \\ 0,0959 & 0,0958 & 0,0786 & -0,0013 & -0,0456 & -0,0161 \\ 0 & 0 & 0,0007 & 0,0393 & 0,0506 & -0,1431 \\ -0,718 & 0,2813 & -0,7838 & 0 & 0,8234 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3919 & 0 & 2,5866 \end{bmatrix} \quad (G.16)$$

$$F^* = \begin{bmatrix} -1,532 & 0,467 & -1,254 & -0,434 & -14,565 & 2,876 \\ 1,724 & -0,275 & 1,274 & 0,493 & 0,132 & 0,013 \end{bmatrix} \quad (G.17)$$

### G.2.3 Reglermatrizen zu Kapitel 4

$$\mathbf{\Pi}_x^y = \begin{bmatrix} 0,9102 & -0,0898 & 0,902 & 0 & -0,0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,451 & 0 & -0,0194 \\ 0,0958 & 0,0958 & 0,0785 & -0,0013 & -0,0526 & -0,0186 \\ 0 & 0 & 0,0007 & 0,0392 & 0,0584 & -0,1652 \\ -0,7186 & 0,2814 & -0,7841 & 0 & 0,9506 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3921 & 0 & 2,9864 \end{bmatrix} \quad (\text{G.18})$$

$$\mathbf{F}^y = \begin{bmatrix} -1,533 & 0,467 & -1,255 & -0,434 & -16,816 & 3,32 \\ 1,725 & -0,275 & 1,274 & 0,493 & 0,156 & 0,014 \end{bmatrix} \quad (\text{G.19})$$

$$\mathbf{\Pi}_x^{\text{OR}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.20})$$

$$\mathbf{F}^{\text{OR}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1,5 & -0,55 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1,5 & 0,55 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.21})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, M. ; BOGERT, A. J. d.: Optimality principles for model-based prediction of human gait. In: *Journal of Biomechanics* 43 (2010), S. 1055–1060
- [2] AL'BREKHT, E. G.: On the optimal stabilization of nonlinear systems. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 25 (1961), Nr. 5, S. 1254–1266
- [3] ALESSANDRETTI, A. ; AGUIAR, A. P. ; JONES, C. N.: An Economic Model Predictive Control scheme with terminal penalty for continuous-time systems. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2014, S. 2728–2733
- [4] AMANN, H. ; ESCHER, J. : *Analysis I*. Birkhäuser Basel, 2006
- [5] AMRIT, R. ; RAWLINGS, J. B. ; ANGELI, D. : Economic optimization using model predictive control with a terminal cost. In: *Annual Reviews in Control* 35 (2011), S. 178–186
- [6] ANDERSON, B. D. O. ; MOORE, J. B.: *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Dover Publications, Inc., 2007
- [7] ANDERSON, B. D. ; KOKOTOVIC, P. V.: Optimal Control Problems over Large Time Intervals. In: *Automatica* 23 (1987), Nr. 3, S. 355–363
- [8] ANDERSON, F. C. ; PANDY, M. G.: Dynamic Optimization of Human Walking. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 123 (2001), S. 381–390
- [9] ARENS, T. ; HETTLICH, F. ; NGER, C. K. ; KOCKELKORN, U. ; LICHTENEGGER, K. ; STACHEL, H. : *Mathematik*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2018
- [10] ARMSTRONG, E. S.: On the linear optimal digital servo problem. In: *International Journal of Control* 20 (1974), Nr. 2, S. 347–348

- [11] ARTSTEIN, Z. ; LEIZAROWITZ, A. : Tracking periodic Signals with the Overtaking Criterion. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 11, S. 1123–1126
- [12] ASEEV, S. M. ; KRASTANOV, M. I. ; VELIOV, V. M.: Optimality Conditions for Discrete-Time Optimal Control on Infinite Horizon / Operations Research and Control Systems, International Institute for Applied Systems Analysis, Vienna University of Technology. 2016 (2016-09). – Forschungsbericht
- [13] ATHANS, M. ; FALB, P. L.: *Optimal Control: An introduction to the theory and its applications*. McGraw-Hill Book Company, 1966
- [14] BAKHTIAR, T. ; HARA, S. : Tracking performance limits for SIMO discrete-time feedback control systems. In: *SICE 2004 Annual Conference* Bd. 2, 2004, S. 1825–1830
- [15] BAKHTIAR, T. :  $\mathcal{H}_2$  Control Performance Limitations for SIMO Feedback Control Systems, The University of Tokyo, Diss., 2006
- [16] BARTELS, R. H. ; STEWART, G. W.: Solution of the matrix equation  $AX + XB = C$ . In: *Communications of the ACM* 15 (1972), Nr. 9, S. 820–826
- [17] BAUER, P. ; BOKOR, J. : An Exact Solution for the Infinite Horizon LQ Optimal Output Tracking Problem. In: *17th IEEE International Conference on Control Applications, Part of 2008 IEEE Multi-conference on Systems and Control*, 2008, S. 822–827
- [18] BAUER, P. ; BOKOR, J. : Development and performance evaluation of an infinite horizon LQ optimal tracker. In: *European Journal of Control* 39 (2018), S. 8–20
- [19] BELLMAN, R. : *Stability theory of differential equations*. McGraw Hill, 1953
- [20] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Minimized Input-Energy Gain based Static Decoupling Control for Linear Over-actuated Systems with Sinusoidal References. In: *12th IEEE International Conf. on Control and Automation (ICCA)*, 2016, S. 253–259
- [21] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Optimal Stationary Synchronization of Heterogeneous Linear Multi-Agent Systems. In: *2018 American Control Conf. (ACC)*, 2018, S. 5181–5188

- [22] BERNHARD, S. : Time-Invariant Control in LQ Optimal Tracking: An Alternative to Output Regulation. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), Nr. 1, S. 4912–4919. – 20th IFAC World Congress
- [23] BERNHARD, S. : Ein einheitliches Verfahren zum einfachen Entwurf von Folgeregelungen für quadratische, unter- und überaktuierte lineare Systeme. In: *289. Dresdner Automatisierungstechnisches Kolloquium*. Dresden, 2018. – Vortrag am 28.05.2018
- [24] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Zeitinvariante linear-quadratische Folgeregelung: Optimalität und Approximation. In: *GMA Fachausschuss 1.40 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“*. Anif, Österreich, 2017. – Vortrag am 20.09.2017
- [25] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Static Optimal Decoupling Control for Linear Over-Actuated Systems regarding Time-Varying References. In: *2017 American Control Conf. (ACC)*, 2017, S. 1049–1055
- [26] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Ein Beitrag zur datenbasierten adaptiven dynamischen Programmierung: Optimale Folgeregelung unbekannter linearer Systemdynamiken. In: *GMA Fachausschuss 1.40 „Systemtheorie und Regelungstechnik“*. Anif, Österreich, 2018. – Vortrag am 19.09.2018
- [27] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Ein einheitlicher Ansatz zur Trajektorienfolgeregelung von quadratischen, unter- und überaktuierten linearen Systemen. In: *52. Regelungstechnisches Kolloquium in Boppard*, 2018. – Vortrag am 22.02.2018
- [28] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : LQ Optimal Tracking with Unbounded Cost for Unknown Dynamics: An Adaptive Dynamic Programming Approach. In: *2018 European Control Conference (ECC)*, 2018, S. 2113–2120
- [29] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Optimal Output Regulation for Square, Overactuated and Underactuated Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (2019). – DOI 10.1109/TAC.2019.2959999
- [30] BERNSTEIN, D. S.: *Matrix Mathematics: Theory, Facts and Formulas*. 2. Auflage. Princeton University Press, 2009

- [31] BERTSEKAS, D. P.: *Nonlinear Programming*. 2. Auflage. Athena Scientific, 1999
- [32] BHATACHARYYA, S. P. ; PEARSON, J. : On the linear servomechanism problem. In: *International Journal of Control* 12 (1970), Nr. 5, S. 795–806
- [33] BLOT, J. ; HYEK, N. : Sufficient Conditions for Infinite-Horizon Calculus of Variations problems. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* (2000)
- [34] BOLTYANSKI, V. G. ; POZNYAK, A. : *The Robust Maximum Principle*. Birkhäuser Basel, 2012
- [35] BOYD, S. ; VANDENBERGHE, L. : *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004
- [36] BOYD, S. ; GHAOUI, L. E. ; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V. : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994
- [37] BRINKERHOFF, R. ; DEVASIA, S. : Output Tracking for Actuator Deficient/Redundant Systems: Multiple Piezoactuator Example. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23 (2000), Nr. 2, S. 370–373
- [38] BRUNT, B. van: *The Calculus of Variations*. Springer-Verlag New York, 2006
- [39] BRYSON, A. E. ; HO, Y.-C. : *Applied optimal control: Optimization, estimation and control*. Taylor&Francis, 1975
- [40] CALLIER, F. M. ; WINKIN, J. : On the exponential convergence of the time-invariant matrix riccati differential equation. In: *IEEE 31st Conference on Decision and Control*, 1992, S. 1536–1537
- [41] CARLSON, D. A.: A Carathéodory-Hamilton-Jacobi Theory for Infinite-Horizon Optimal Control Problems. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 48 (1986), Nr. 2, S. 265–287
- [42] CARLSON, D. A.: Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: When optimal solutions are agreeable. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 64 (1990), Nr. 1, S. 55–69



- [43] CARLSON, D. A. ; HAURIE, A. : *Infinite Horizon Optimal Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987
- [44] CARTIGNY, P. ; MICHEL, P. : On a sufficient transversality condition for infinite horizon optimal control problems. In: *Automatica* 39 (2003), Nr. 6, S. 1007–1010
- [45] CHEN, G. ; CHEN, J. ; MIDDLETON, R. : Optimal tracking performance for SIMO systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 10, S. 1770–1775
- [46] CHEN, Y. ; WANG, J. : Adaptive Energy-Efficient Control Allocation for Planar Motion Control of Over-Actuated Electric Ground Vehicles. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22 (2014), S. 1362–1373
- [47] COLE, M. O. ; WONGRATANAPHISAN, T. : Optimal LQ feedforward tracking with preview: Practical design for rigid body motion control. In: *Control Engineering Practice* 26 (2014), S. 41–50
- [48] CORONA, D. ; CRISTOFARO, A. ; CORRANDINI, M. L.: Optimal Output Regulation for Underactuated Systems with Quasiperiodic References. In: *IFAC PapersOnLine* 50 (2017), Nr. 1, S. 3654–3659. – 20th IFAC World Congress
- [49] CORONA, D. ; CRISTOFARO, A. : Some remarks on optimal output regulation for weakly dual redundant plants. In: *24th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2016, S. 1205–1211
- [50] CORONA, D. ; CRISTOFARO, A. : Optimality principles and decomposition of tracking controllers for weakly dual redundant systems. In: *Optimal Control Applications and Methods* 39 (2018), S. 1451–1466
- [51] CRISTOFARO, A. ; GALEANI, S. : Output invisible control allocation with steady-state input optimization for weakly redundant plants. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2014, S. 4246–4253
- [52] DAVISON, D. E. ; DAVISON, E. J.: Optimal Servomechanism Control of Plants With Fewer Inputs Than Outputs. In: *18th IFAC World Congress*, 2011, S. 11332–11337

- [53] DAVISON, E. J. ; WANG, S. H.: Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems. In: *Automatica* 10 (1974), S. 643–658
- [54] DE TOMMASI, G. ; GALEANI, S. ; PIRONTI, A. ; VARANO, G. ; ZACCARIAN, L. : Nonlinear dynamic allocator for optimal input/output performance trade-off: Application to the JET tokamak shape controller. In: *Automatica* 47 (2011), Nr. 5, S. 981–987
- [55] DRESSLER, R. M. ; LARSON, R. E.: Computation of optimal control in partially controlled linear systems. In: *Joint Automatic Control Conference*, 1968, S. 711–715
- [56] DUAN, M. ; OKWUDIRE, C. E.: Connections between control allocation and linear quadratic control for weakly redundant systems. In: *Automatica* 101 (2019), S. 96–102
- [57] ERDEMIR, A. ; MCLEAN, S. ; HERZOG, W. ; BOGERT, A. J. d.: Model-Based Estimation of Muscle Forces Exerted During Movements. In: *Clinical Biomechanics* 22 (2007), Nr. 2, S. 131–154
- [58] FALB, P. L. ; WOLOVICH, W. A.: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. In: *IEEE Transactions on Automation and Control* AC-12 (1967), S. 651–659
- [59] FALCONI, R. ; MELCHIORRI, C. : Dynamic Model and Control of an Over-actuated Quadrotor UAV. In: *10th IFAC Symposium on Robot Control*, 2012, S. 192–197
- [60] FEINSTEIN, C. D. ; LUENBERGER, D. G.: Analysis of the Asymptotic Behavior of Optimal Control Trajectories: The Implicit Programming Problem. In: *Siam J. Control and Optimization* 19 (1981), S. 561–585
- [61] FIALA, J. ; KOČVARA, M. ; STINGL, M. : *PENLAB: A MATLAB solver for nonlinear semidefinite optimization*. 2013. – [Online] <https://arxiv.org/abs/1311.5240>
- [62] FÖLLINGER, O. : *Optimal Regelung und Steuerung*. 3. Auflage. R. Oldenbourg Verlag, 1994
- [63] FRANCIS, B. A.: The Linear Multivariable Regulator Problem. In: *Siam Journal on Control and Optimization* 15 (1977), S. 486–505

- [64] FRANCIS, B. A.: The Optimal Linear-Quadratic Time-Invariant Regulator with Cheap Control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (1979), Nr. 4, S. 616–621
- [65] FUTURA, K. ; KOMIYA, K. : Design of Model-Following Servo controller. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 27 (1982), Nr. 3, S. 725–727
- [66] GALEANI, S. ; PETTINARI, S. : On dynamic input allocation for fat plants subject to multi-sinusoidal exogenous inputs. In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2014, S. 2396–2403
- [67] GALEANI, S. ; SERRANI, A. ; VARANO, G. ; ZACCARIAN, L. : On linear over-actuated regulation using input allocation. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 2011, S. 4771–4776
- [68] GALEANI, S. ; SERRANI, A. ; VARANO, G. ; ZACCARIAN, L. : On input allocation-based regulation for linear over-actuated systems. In: *Automatica* 52 (2015), S. 346–354
- [69] GAO, W. ; JIANG, Z.-P. : Linear Optimal Tracking Control: An Adaptive Dynamic Programming Approach. In: *2015 American Control Conference (ACC)*, 2015, S. 4929–4934
- [70] GAO, W. ; JIANG, Z.-P. : Adaptive Dynamic Programming Approach and Adaptive Optimal Output Regulation of Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 61 (2016), Nr. 12, S. 4164–4169
- [71] GAO, W. ; JIANG, Z.-P. : Adaptive optimal output regulation via output-feedback: An adaptive dynamic programming approach. In: *IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, 2016, S. 5845–5850
- [72] GARCÍA, M. A. ; SALGADO, M. E. ; SILVA, E. I.: Achievable performance bounds for tall MIMO systems. In: *IET Control Theory Applications* 5 (2011), Nr. 5, S. 736–743
- [73] GARCÍA, M. A. ; SILVA, E. I. ; SALGADO, M. E.: On tracking performance limits for tall systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 4 (2011), Nr. 1, S. 11326–11331. – 18th IFAC World Congress

- [74] GRASS, D. ; CAULKINS, J. P. ; FEICHTINGER, G. ; TRAGLER, G. ; BEHRENS, D. A.: *Optimal Control of Nonlinear Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [75] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 3: Kinetik*. 9. Auflage. Springer-Verlag, 2006
- [76] HALKIN, H. : Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. In: *Econometrica* 42 (1974), Nr. 2, S. 267–272
- [77] HAMMOND, P. : Agreeable Plans With Many Capital Goods. In: *The Review of Economic Studies* 42 (1975), Nr. 1, S. 1–14
- [78] HAMMOND, P. J. ; MIRRLEES, J. A.: Agreeable Plans. In: MIRRLEES, J. A. (Hrsg.) ; STERN, N. H. (Hrsg.): *Models of Economic Growth*. London: Macmillan, 1973, Kapitel 13, S. 283–299
- [79] HARA, S. ; KANNO, M. ; BAKHTIAR, T. : Optimal Tracking Performance for SIMO Feedback Control Systems: Analytical Closed-Form Expressions and Guaranteed Accuracy Computation. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, S. 887–892
- [80] HÄRKEGÅRD, O. ; GLAD, T. : Resolving actuator redundancy - Optimal control vs. control allocation. In: *Automatica* 41 (2005), S. 137–144
- [81] HARVEY, C. A. ; STEIN, G. : Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 23 (1978), Nr. 3, S. 378–387
- [82] HASSIBI, A. ; HOW, J. ; BOYD, S. : A Path-following Method for Solving BMI Problems in Control. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1999, S. 1385–1389
- [83] HAURIE, A. ; SETHI, S. P.: Decision and forecast horizons, agreeable plans, and the maximum principle for infinite horizon control problems. In: *Operations Research Letters* 3 (1984), Nr. 5, S. 261–265
- [84] HENDRICKS, E. ; JANNERUP, O. ; SØRENSEN, P. H.: *Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

- [85] HERMANN, J. ; BERNHARD, S. ; KONIGORSKI, U. ; ADAMY, J. : Designing Communication Topologies for Optimal Synchronization Trajectories of Homogeneous Linear Multi-Agent Systems. In: *2018 European Control Conference (ECC)*, 2018, S. 1454–1461
- [86] HESSELBARTH, J. : *Senkrecht startendes Flugzeug*. Europäische Patentschrift EP 2 776 315 B1, Europäisches Patentamt, Apr. 2016
- [87] HIEBER, M. : *Analysis I*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2018
- [88] HORN, R. A. ; JOHNSON, C. R.: *Matrix Analysis*. 2nd. Cambridge University Press, 2013
- [89] HUANG, J. : *Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications*. SIAM, 2004
- [90] HUANG, Y. : *Linear Quadratic Tracking Control for Unknown Continuous-time Systems Using Adaptive Dynamic Programming*, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Master-Thesis, 2017
- [91] IBARRA, C. F. ; SALGADO, B. M.: Optimal tracking control for linear stable tall plants. In: *2015 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 2015, S. 379–384
- [92] ICHIKAWA, A. : Optimal overtaking control for linear time-varying systems. In: *International Journal of Control* 51 (1990), Nr. 5, S. 1425–1437
- [93] IFTAR, A. : Optimal solution to the servomechanism problem for systems with stochastic and deterministic disturbances. In: *International Journal of Control* 51 (1990), Nr. 6, S. 1327–1341
- [94] ISERMANN, R. (Hrsg.): *Fahrdynamik-Regelung*. 2006
- [95] ISIDORI, A. : *Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems*. Springer International Publishing Switzerland, 2017
- [96] ISIDORI, A. ; BYRNES, C. I.: Output Regulation of Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 35 (1990), Nr. 2, S. 131–140

- [97] JENSEN, T. N. ; WISNIEWSKI, R. ; PERSIS, C. D. ; KALLESØE, C. S.: Output regulation of large-scale hydraulic networks with minimal steady state power consumption. In: *Control Engineering Practice* 22 (2014), S. 103–113
- [98] JIANG, Y. ; JIANG, Z.-P. : Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics. In: *Automatica* 48 (2012), Nr. 10, S. 2699–2704
- [99] JOHANSEN, T. A. ; FOSSEN, T. I.: Control allocation - A survey. In: *Automatica* 49 (2013), May, Nr. 5, S. 1087–1103
- [100] JOHNSON, C. D.: Optimal Control of the Linear Regulator with Constant Disturbances. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 13 (1968), Nr. 4, S. 416–421
- [101] KARIMI-GHARTEMANI, M. ; KHAJEHODDIN, S. A. ; JAIN, P. ; BAKHSHAI, A. : Linear quadratic output tracking and disturbance rejection. In: *International Journal of Control* 84 (2011), Nr. 8, S. 1442–1449
- [102] KEFFERPÜTZ, K. : *Regelung für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2012
- [103] KHALIL, H. : *Nonlinear Systems*. 3. Auflage. Prentice Hall, 2002
- [104] KIM, H. ; SHIM, H. ; SEO, J. H.: Output Consensus of Heterogeneous Uncertain Linear Multi-Agent Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56 (2011), Nr. 1, S. 200–206
- [105] KLEINMAN, D. L.: On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 13 (1968), Nr. 1, S. 114–115
- [106] KREINDLER, E. : On servo problems reducible to regulator problems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 14 (1969), Nr. 4, S. 413–415
- [107] KREINDLER, E. : On the linear optimal servo problem. In: *International Journal of Control* 9 (1969), Nr. 4, S. 465–472

- [108] KRENER, A. J.: The Construction of Optimal Linear and Nonlinear Regulators. In: *Systems, Models and Feedback: Theory and Applications* 12 (1992), S. 301–322
- [109] KRIKELIS, N. J. ; PAPADOPOULOS, E. G.: An optimal design approach for tracking problems and its assessment against classical controllers. In: *International Journal of Control* 36 (1982), Nr. 2, S. 249–265
- [110] KUČERA, V. : A Review of the Matrix Riccati Equation. In: *Kybernetika* 9 (1973), Nr. 1, S. 42–61
- [111] KUČERA, V. : The Matrix Equation  $AX + XB = C$ . In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 26 (1974), Nr. 1, S. 15–25
- [112] KWAKERNAAK, H. ; SIVAN, R. : *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972
- [113] KWAKERNAAK, H. ; SIVAN, R. : The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 17 (1972), Nr. 1, S. 79–86
- [114] KWON, W. H. ; MOON, Y. S. ; AHN, S. C.: Bounds in algebraic riccati and lyapunov equations: A survey and some new results. In: *International Journal of Control* 64 (1996), S. 377–389
- [115] LATO, V. : *Ein Entwurfsverfahren zur expliziten Folgeregelung nicht-linearer Systeme*, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Master-Thesis, 2018
- [116] LEIZAROWITZ, A. : Infinite Horizon Autonomous Systems with Unbounded Cost. In: *Applied Mathematics and Optimization* 13 (1985), S. 19–43
- [117] LEIZAROWITZ, A. : Tracking Nonperiodic Trajectories with the Overtaking Criterion. In: *Applied Mathematics and Optimization* 14 (1986), S. 155–171
- [118] LEIZAROWITZ, A. : Infinite horizon stochastic regulation and tracking with the overtaking criterion. In: *Stochastics* 22 (1987), S. 117–150
- [119] LEWIS, F. L. ; VRABIE, D. L. ; SYRMOS, V. L.: *Optimal Control*. 3. Auflage. John Wiley & Sons, 2012

- [120] LIAO, F. ; BENOSMAN, M. ; WANG, J. ; LUM, K.-Y. : Adaptive control allocation for non-linear systems with internal dynamics. In: *IET Control Theory & Applications* 4 (2010), S. 909–922. – ISSN 1751–8652
- [121] LOCATELLI, A. : *Optimal Control: An Introduction*. Birkhäuser Verlag, 2001
- [122] LUKES, D. L.: Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems. In: *SIAM Journal on Control* 7 (1969), Nr. 1, S. 75–100
- [123] LUNZE, J. : *Regelungstechnik 2*. 6. Auflage. 2010
- [124] MAFFEZZONI, C. : Hamilton-Jacobi Theory for Periodic Control Problems. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 14 (1974), Nr. 1, S. 21–29
- [125] MEYBERG, K. ; VACHENAUER, P. : *Höhere Mathematik 2*. 4. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006. – 2. korrigierter Nachdruck
- [126] MOASE, W. H. ; MANZIE, C. : Consideration of plant behaviour in optimal servo-compensator design. In: *International Journal of Control* 89 (2016), Nr. 7, S. 1316–1331
- [127] MODARES, H. ; LEWIS, F. L.: Linear Quadratic Tracking Control of Partially-Unknown Continuous-Time Systems Using Reinforcement Learning. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 59 (2014), Nr. 11, S. 3051–3056
- [128] MODARES, H. ; LEWIS, F. L. ; JIANG, Z.-P. : Optimal Output-Feedback Control of Unknown Continuous-Time Linear Systems Using Off-policy Reinforcement Learning. In: *IEEE Transactions on Cybernetics* 46 (2016), Nr. 11, S. 2401–2410
- [129] MYOKEN, H. ; KAMIYAMA, S. : A further study of optimal tracking structure with the offset problem and its macroeconomic application. In: *International Journal of Control* 31 (1980), Nr. 5, S. 893–904
- [130] NGUYEN, N. T.: *Model-Reference Adaptive Control – A Primer*. Springer International Publishing, 2018



- [131] OSTERTAG, E. : An Improved Path-Following Method for Mixed  $H_2$  /  $H_\infty$  Controller Design. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), S. 1967–1971
- [132] PADFIELD, G. D.: *Helicopter flight dynamics*. Oxford: Blackwell Pub, 2007
- [133] PRATTICHIZZO, D. ; NTOGRAMATZIDIS, L. ; MARRO, G. : A new approach to the cheap LQ regulator exploiting the geometric properties of the Hamiltonian system. In: *Automatica* 44 (2008), S. 2834–2839
- [134] QIN, C. ; ZHANG, H. ; LUO, Y. : Online optimal tracking control of continuous-time linear systems with unknown dynamics by using adaptive dynamic programming. In: *International Journal of Control* 87 (2014), Nr. 5, S. 1000–1009
- [135] RAMASWAMI, B. ; RAMAR, K. : A new method of solving optimal servo problems reducible to regulator problems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 15 (1970), Nr. 4, S. 500–501
- [136] RAMASWAMI, B. ; RAMAR, K. : A new method of solving optimal servo problems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 17 (1972), Nr. 1, S. 131–135
- [137] ROSENBROCK, H. H.: The zeros of a system. In: *International Journal of Control* 18 (1973), Nr. 2, S. 297–299
- [138] RUGE, P. ; BIRK, C. ; WERMUTH, M. : *Das Ingenieurwissen: Mathematik und Statistik*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2014
- [139] SABERI, A. ; SANNUTI, P. : Cheap and Singular Control for Linear Quadratic Regulators. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 32 (1987), Nr. 3, S. 208–219
- [140] SABERI, A. ; STOORVOGEL, A. A. ; SANNUTI, P. : *Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints*. Springer-Verlag London, 2000
- [141] SARTORI, F. ; TOMMASI, G. D. ; PICCOLO, F. : The Joint European Torus: Plasma Position and Shape Control in the World's Largest Tokamak. In: *IEEE Control Systems Magazine* Bd. 26, 2006, S. 64–78

- [142] SAVOV, S. : *Solution Bounds for Algebraic Equations in Control Theory*. Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2014
- [143] SCHOCHETMAN, I. E. ; SMITH, R. L.: Optimality criteria for deterministic discrete-time infinite horizon optimization. In: *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2005 (2005), Nr. 1, S. 57–80
- [144] SCHRADER, C. B. ; SAIN, M. K.: Research on system zeros: a survey. In: *International Journal of Control* 50 (1989), Nr. 4, S. 1407–1433
- [145] SCIARRETTA, A. ; GUZZELLA, L. : Control of Hybrid Electric Vehicles. In: *IEEE Control Systems Magazine* 27 (2007), Nr. 2, S. 60–70
- [146] SEIERSTAD, A. ; SYDSÆTER, K. : Sufficient Conditions in Optimal Control Theory. In: *International Economic Review* 18 (1977), Nr. 2, S. 367–391
- [147] SEIERSTAD, A. ; SYDSÆTER, K. : *Optimal Control Theory with Economic Applications*. North-Holland, 1987
- [148] SERRANI, A. : Output regulation for over-actuated linear systems via inverse model allocation. In: *51st IEEE Conference on Decision and Control*, 2012, S. 4871–4876
- [149] SINGH, A. K. ; C.PAL, B. : An extended linear quadratic regulator for LTI systems with exogenous inputs. In: *Automatica* 76 (2017), S. 10–16
- [150] SONTAG, E. D.: *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag New York, 1998
- [151] STERN, L. E.: Criteria of Optimality in the Infinite-Time Optimal Control Problem. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 44 (1984), Nr. 3, S. 497–508
- [152] TAN, H. ; RUGH, W. J.: Nonlinear Overtaking Optimal Control: Sufficiency, Stability, and Approximation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (1998), Nr. 12, S. 1703–1718
- [153] TODOROV, E. : Optimality principles in sensorimotor control. In: *Nature Neuroscience* 7 (2004), Nr. 9, S. 907–915

- [154] TRÉLAT, E. ; ZHANG, C. ; ZUAZUA, E. : Steady-state and periodic exponential turnpike property for optimal control problems in hilbert spaces. In: *Siam J. Control Optim.* 56 (2018), Nr. 2, S. 1222–1252
- [155] TRENTELMAN, H. ; STOORVOGEL, A. A. ; HAUTUS, M. : *Control Theory for Linear Systems*. Springer-Verlag London, 2001
- [156] TSIOTRAS, P. ; DOUMTCHENKO, V. : Control of spacecraft subject to actuator failures: State-of-the-art and open problems. In: *Journal of the Astronautical Sciences* 48 (2000), Nr. 2, S. 337–358
- [157] ULBRICH, M. ; ULBRICH, S. : *Nichtlineare Optimierung*. Birkhäuser Basel, 2012
- [158] VANANTWERP, J. G. ; BRAATZ, R. D.: A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. In: *Journal of Process Control* 10 (2000), S. 363–385
- [159] VEGA, F. N. ; SALGADO, M. E.: Optimal design of P and PI controllers for simple SITO plants. Cases study. In: *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, 2014, S. 195–200
- [160] VOULGARIS, P. ; VALAVANI, L. : High performance linear-quadratic and H-infinity designs for a 'supermaneuverable' aircraft. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14 (1991), S. 157–165
- [161] VRABIE, D. ; PASTRAVANU, O. ; ABU-KHALAF, M. ; LEWIS, F. L.: Adaptive optimal control for continuous-time linear-systems based on policy iteration. In: *Automatica* 45 (2009), Nr. 2, S. 477–484
- [162] WAHRBURG, A. : *Entwurf robuster modellbasierter Fehlerisolationsfilter*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2013
- [163] WAHRBURG, A. ; ADAMY, J. : Entkopplungsregelungen für lineare überaktuierte Systeme. In: *at - Automatisierungstechnik* 61 (2013), Nr. 1, S. 28–38
- [164] WEIHRICH, G. : *Optimale Regelung linearer deterministischer Prozesse*. R. Oldenbourg Verlag, 1973
- [165] WIELAND, P. ; SEPULCHRE, R. ; ALLGÖWER, F. : An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization. In: *Automatica* 47 (2011), Nr. 5, S. 1068–1074

- [166] WILLEMS, J. C. ; KITAPCI, A. ; SILVERMAN, L. M.: Singular Optimal Control: A Geometric Approach. In: *Siam J. Control Optim.* 24 (1986), Nr. 2, S. 323–337
- [167] WILLEMS, J. L. ; MAREELS, I. M. Y.: A rigorous solution of the infinite time interval LQ problem with constant state tracking. In: *System & Control Letters* 52 (2004), Nr. 3-4, S. 289–296
- [168] WOODYATT, A. R. ; SERON, M. M. ; FREUDENBERG, J. S. ; MIDDLETON, R. H.: Cheap control tracking performance for non-right-invertible systems. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12 (2002), Nr. 15, S. 1253–1273
- [169] WOODYATT, A. : Limitations on achievable tracking accuracy for single-input two-output systems. In: *National Symposium on Functional Analysis, Optimization and Applications*. Canberra AUS : Centre for Mathematics and its Applications, Mathematical Sciences Institute, The Australian National University, 1999, S. 185–193
- [170] ZACCARIAN, L. : Dynamic allocation for input redundant control systems. In: *Automatica* 45 (2009), S. 1431–1438
- [171] ZASLAVSKI, A. J.: *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer US, 2006
- [172] ZASLAVSKI, A. J.: Turnpike Properties of Optimal Control Systems. In: *AENORM* 20 (2012), Nr. 77, S. 36–44
- [173] ZASLAVSKI, A. J.: *Turnpike Theory of Continuous-Time Linear Optimal Control Problems*. Springer International Publishing, 2015
- [174] ZASLAVSKI, A. J. ; LEIZAROWITZ, A. : Optimal Solution of Linear Control Systems with Nonperiodic Convex Integrands. In: *Mathematics of Operations Research* 22 (1997), Nr. 3, S. 726–746
- [175] ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Springer-Taschenbuch der Mathematik*. 9. Auflage. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2013. – Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew, Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler, Herausgegeben von E. Zeidler
- [176] ZORICH, V. A.: *Mathematical Analysis I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004
- [177] ZORICH, V. A.: *Mathematical Analysis II*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016

# Liste der Veröffentlichungen, Vorträge und Patente

- [1] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Minimized Input-Energy Gain based Static Decoupling Control for Linear Over-actuated Systems with Sinusoidal References. In: *12th IEEE International Conf. on Control and Automation (ICCA)*, 2016, S. 253–259
- [2] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Static Optimal Decoupling Control for Linear Over-Actuated Systems regarding Time-Varying References. In: *2017 American Control Conf. (ACC)*, 2017, S. 1049–1055
- [3] BERNHARD, S. : Time-Invariant Control in LQ Optimal Tracking: An Alternative to Output Regulation. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), Nr. 1, S. 4912–4919. – 20th IFAC World Congress
- [4] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Optimal Stationary Synchronization of Heterogeneous Linear Multi-Agent Systems. In: *2018 American Control Conf. (ACC)*, 2018, S. 5181–5188
- [5] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : LQ Optimal Tracking with Unbounded Cost for Unknown Dynamics: An Adaptive Dynamic Programming Approach. In: *2018 European Control Conference (ECC)*, 2018, S. 2113–2120
- [6] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Optimal Output Regulation for Square, Overactuated and Underactuated Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (2019). – DOI 10.1109/TAC.2019.2959999
- [7] HERMANN, J. ; BERNHARD, S. ; KONIGORSKI, U. ; ADAMY, J. : Designing Communication Topologies for Optimal Synchronization Trajectories of Homogeneous Linear Multi-Agent Systems. In: *2018 European Control Conference (ECC)*, 2018, S. 1454–1461

- [8] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Zeitinvariante linear-quadratische Folgeregelung: Optimalität und Approximation. In: *GMA Fachausschuss 1.40 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“*, 2017. – Vortrag am 20.09.2017
- [9] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Ein einheitlicher Ansatz zur Trajektorienfolgeregelung von quadratischen, unter- und überaktuierten linearen Systemen. In: *52. Regelungstechnisches Kolloquium in Boppard*, 2018. – Vortrag am 22.02.2018
- [10] BERNHARD, S. : Ein einheitliches Verfahren zum einfachen Entwurf von Folgeregelungen für quadratische, unter- und überaktuierte lineare Systeme. In: *289. Dresdner Automatisierungstechnisches Kolloquium*, 2018. – Vortrag am 28.05.2018
- [11] BERNHARD, S. ; ADAMY, J. : Ein Beitrag zur datenbasierten adaptiven dynamischen Programmierung: Optimale Folgeregelung unbekannter linearer Systemdynamiken. In: *GMA Fachausschuss 1.40 „Systemtheorie und Regelungstechnik“*, 2018. – Vortrag am 19.09.2018
- [12] ZHANG, C. ; LEVRIER, J. ; BERNHARD, S. : *Verfahren zur Ermittlung der Lage des Schwerpunkts eines Fahrzeugs*. Deutsche Patentschrift DE102014200987, Deutsches Patent- und Markenamt, 23. Juli 2015
- [13] ZHANG, C. ; BERNHARD, S. ; KUNTCHAR, A. : *Verfahren zur Ermittlung der Lage des Schwerpunkts eines Fahrzeugs*. Deutsche Patentschrift DE102017220860, Deutsches Patent- und Markenamt, 28. März 2019

# Lebenslauf

---

## Persönliche Daten

---

Name	Sebastian Bernhard
Geburtsdatum	20.04.1987
Geburtsort	Mainz, Deutschland

---

---

## Werdegang

---

Seit April 2019	Entwicklungsingenieur für autonome Systeme und Robotik bei IAV GmbH, Berlin
2014 – 2019	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt, Fachgebiet Regelungsmethoden und Robotik
2011 – 2014	Master of Science in Mechatronik, Technische Universität Darmstadt, Vertiefung: Simulation and Control of Mechatronic Systems
2007 – 2011	Bachelor of Science in Mechatronik, Technische Universität Darmstadt
2006	Allgemeine Hochschulreife, Bischöfliches Willigis Gymnasium, Mainz

---